COLEÇÃO MATEMÁTICA
28

COLEÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n

3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS

4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA

5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

8 – CÁLCULO INTEGRAL EM *IR* – PRIMITIVAS

9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS

10 – SUCESSÕES E SÉRIES

11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes

12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM *IR*

13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS

14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica

15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS

16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES

17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS

18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA – Com Python 3 e R

20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação

21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações

22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos

23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n

24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS

25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais

26 – ÁLGEBRA LINEAR – TEORIA E PRÁTICA

27 – ANÁLISE MATEMÁTICA I – Resumo Teórico, Exercícios Resolvidos e Propostos

28 – MATEMÁTICA ZERO

Matemática Zero

FILIPE CARVALHO
SÍLVIA CARVALHO

2.ª EDIÇÃO
Revista e corrigida

EDIÇÕES SÍLABO

É expressamente proibido reproduzir, no todo ou em parte, sob qualquer
forma ou meio gráfico, eletrónico ou mecânico, inclusive fotocópia, este livro.
As transgressões serão passíveis das penalizações previstas na legislação em vigor.

Não participe ou encoraje a pirataria eletrónica de materiais protegidos.
O seu apoio aos direitos dos autores será apreciado.

Visite a Sílabo na rede

www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Matemática Zero
Autores: Filipe Carvalho, Sílvia Carvalho
© Edições Sílabo, Lda.
Capa: Pedro Mota
Imagem da capa: Wavebreakmedia Ltd | Dreamstime.com

1ª Edição – Lisboa, setembro de 2021.
2ª Edição – Lisboa, fevereiro de 2023.
Impressão e acabamentos: ARTIPOL – Artes Tipográficas, Lda.
Depósito Legal: 509573/22
ISBN: 978-989-561-275-8

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Tel.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

Nota introdutória 9

Capítulo 1

Números e operações

1.1. Operações sobre números naturais 15
1.1.1. Prioridades das operações 17
1.1.2. Propriedades das operações 18

1.2. Operações sobre números inteiros 20
1.2.1. Propriedades das operações 25

1.3. Operações sobre números racionais 27
1.3.1. Propriedades das operações 34

1.4. Potências 40
1.4.1. Potências de expoente natural 40
1.4.2. Potências de expoente inteiro 44
1.4.3. Radicais 46
1.4.4. Potências de expoente racional 48

1.5. Logaritmos 50

LISTA DE CONTEÚDOS ABORDADOS 54
EXERCÍCIOS DE CONSOLIDAÇÃO 55

Capítulo 2

Equações e inequações

2.1. Operações aritméticas de monómios e polinómios 65
2.1.1. Adição algébrica de monómios semelhantes 66
2.2.2. Multiplicação de monómios 67
2.2.3. Adição algébrica de polinómios 68
2.2.4. Multiplicação de polinómios 69

2.2. Fatorização de polinómios 71

2.3. Equações do 1º grau com uma incógnita 75

2.4. Equações do 2º grau com uma incógnita 81

2.5. Outras equações polinomiais 87

2.6. Inequações do 1º grau com uma incógnita 90

2.7. Outras inequações polinomiais 94

LISTA DE CONTEÚDOS ABORDADOS 100

EXERCÍCIOS DE CONSOLIDAÇÃO 101

Capítulo 3

Funções

3.1. Introdução às funções 109

3.2. Operações elementares sobre funções 113

3.3. Generalidades sobre funções 118
3.3.1. Injetividade, sobrejetividade e bijetividade 118
3.3.2. Zero de uma função 120
3.3.3. Sinal de uma função 123
3.3.4. Paridade de uma função 124
3.3.5. Monotonia e extremos 125
3.3.6. Concavidade e pontos de inflexão 128

3.4. Função composta e função inversa 131
3.4.1. Função composta 132
3.4.2. Função inversa 134

3.5. Algumas funções particulares 136
3.5.1. Função constante 136
3.5.2. Função linear 137
3.5.3. Função afim 138
3.5.4. Função quadrática 141
3.5.5. Função racional 143
3.5.6. Função exponencial 144
3.5.7. Função logarítmica 148
3.5.8. Função definida por ramos 152

LISTA DE CONTEÚDOS ABORDADOS 154
EXERCÍCIOS DE CONSOLIDAÇÃO 155

Capítulo 4

Estudo de funções

4.1. Limites 169
4.1.1. Limites infinitos 174
4.1.2. Limites no infinito 179
4.1.3. Potências de expoente real 180

4.2. Continuidade 181

4.3. Assíntotas ao gráfico de uma função 184
4.3.1. Assíntotas verticais 184
4.3.2. Assíntotas horizontais 185
4.3.3. Assíntotas oblíquas 185

4.4. Variação e extremos 187
4.4.1. Taxa média de variação 188
4.4.2. Taxa instantânea de variação 189
4.4.3. Função derivada 190
4.4.4. Aplicação das derivadas ao cálculo de limites 194
4.4.5. Variação de uma função 200
4.4.6. Extremos de uma função 201

4.5. Concavidade e pontos de inflexão 203
4.5.1. Função derivada de segunda ordem 203
4.5.2. Concavidade do gráfico de uma função 205
4.5.3. Pontos de inflexão 205

LISTA DE CONTEÚDOS ABORDADOS 209

EXERCÍCIOS DE CONSOLIDAÇÃO 210

Capítulo 5

Soluções

Capítulo 1 219
Capítulo 2 223
Capítulo 3 226
Capítulo 4 232

Nota introdutória

No ensino universitário e politécnico, muitas licenciaturas e cursos técnicos superiores profissionais têm, no seu plano curricular, disciplinas da área de Matemática.

Os alunos que ingressam nestes cursos e licenciaturas têm percursos escolares muito diversos no que concerne ao ensino secundário e, consequentemente, diferentes níveis de conhecimentos matemáticos. Assim, tem-se verificado que um crescente número de alunos sente a necessidade de recuperar ou reaprender os conceitos basilares indispensáveis como pré-requisitos para as novas aprendizagens. É a esta necessidade que este livro responde. Os seus leitores serão, pois, todos aqueles que procuram um elemento de apoio, um manual que os acompanhe e lhes permita rever, adquirir ou consolidar as noções e os conceitos prévios necessários para obterem sucesso nas unidades curriculares do ensino superior que exijam conhecimentos matemáticos.

Tendo em conta o público-alvo e os objetivos deste livro, especial atenção foi dada à apresentação das matérias abordadas, utilizando-se uma linguagem simples e acessível a todos e expondo-se os conceitos acompanhados de exemplos de aplicação, sempre que possível com ligação ao mundo real. Para treinar a utilização dos conceitos e procedimentos apresentados, ao longo do livro encontram-se exercícios resolvidos. No final de cada capítulo é apresentada uma lista exaustiva dos conteúdos, cujo objetivo é permitir ao estudante identificar de forma célere e eficaz algum assunto particular e são ainda propostos exercícios de consolidação, acompanhados das respetivas soluções.

Uma nota final para referir que para a redação deste livro foram consultados os documentos «Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico» e «Programa e Metas de Matemática A do Ensino Secundário» do Ministério da Educação e Ciência.

Não queremos terminar este texto introdutório sem agradecer aos nossos alunos, para quem queremos fazer sempre mais e melhor: afinal este livro foi inspirado e feito para eles, e serão eles os seus verdadeiros avaliadores.

Dedicamos este livro ao Afonso, Jaime e Vicente, para quem estivemos menos presentes durante a elaboração deste projeto.

Os autores

1

Números e operações

A matemática é inevitavelmente associada aos números. Ao longo deste livro vamos trabalhar com números e, apesar de alguns serem mais familiares do que outros, todos representam quantidades.

Aprendemos desde muito cedo a contar. Uma criança conta o número de brinquedos que tem ou o número de rebuçados que quer receber. Um filho combina com os pais o número de amigos que pode convidar para a sua festa. Um universitário conta o número de disciplinas que ainda lhe faltam para acabar o curso. É deste ato de contar que surge o **conjunto de números naturais** ($\mathbb{N}$), ou seja, o conjunto:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Atualmente, habituamo-nos também, desde muito cedo, a utilizar outro tipo de números. No elevador de um prédio é possível ver muitas vezes os botões dos pisos 0, -1 e -2. As temperaturas máxima e mínima diárias tanto podem ser positivas como negativas. A altitude de um local pode estar acima do nível médio das águas do mar (ser positiva) ou abaixo desse nível (ser negativa). Em qualquer troca comercial há alguém que recebe dinheiro (transferência positiva) e alguém que despende dinheiro (transferência negativa). Para descrever todas estas situações torna-se necessário considerar um conjunto de números mais extenso, como o **conjunto dos números inteiros** ($\mathbb{Z}$), ou seja, o conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Para além de contar, somos confrontados muitas vezes com a necessidade de medir. Quando nascemos avaliam a nossa condição física, nomeadamente através de medições: o comprimento, o peso e o perímetro cefálico, por exemplo. Muitas atividades humanas dependem da medição. A medida da área de implantação de um apartamento determina a parte do condomínio que cabe ao seu proprietário. O valor do imposto municipal sobre imóveis (IMI) depende da medida da sua área. Os medicamentos resultam de uma mistura de quantidades exatas dos seus constituintes. Para que um vinho atinja a qualidade desejada é necessário medir o tempo que ele passa em cada uma das fases de maturação.

Para efetuar medições é necessário identificar a unidade de medida que se utiliza. Um mecânico não pode apenas dizer a um cliente que a reparação do seu carro vai demorar 3. É fácil perceber que 3 dias e 3 minutos representam quantidades de tempo muito diferentes.

Por outro lado, dizer que Usain Bolt bateu o recorde do mundo nos Jogos Olímpicos de 2008, ao vencer a final dos 100 metros livres, com o tempo aproximado de 0,0019 horas ou que Paulo Gomes foi, na mesma ocasião, o melhor maratonista português, acabando a prova em 8295 segundos, dificulta a nossa perceção das

quantidades em causa. Esta, será bem mais fácil se considerarmos que Usain Bolt demorou 6,69 segundos e que Paulo Gomes demorou aproximadamente 2,3 horas.

Como é possível perceber, nos exemplos acima apresentados, existem quantidades que, dependendo da unidade de medida considerada, não podem ser representadas por números inteiros.

Quando dizemos «falta um quarto de hora para chegarmos» estamos a considerar que a unidade de medida é a hora e que a quantidade de tempo referida corresponde a uma parte de uma hora dividida em 4 partes iguais. Esta quantidade pode ser representada na forma de **dízima** por 0,25 horas ou na forma de **fração** por $\frac{1}{4}$ horas. De igual modo, para representar a quantidade correspondente a 7 partes de uma unidade dividida em 4 partes iguais podemos utilizar $\frac{7}{4}$ ou 1,75.

Os números utilizados para representar estas quantidades são assim elementos do **conjunto dos números racionais** ($\mathbb{Q}$), o conjunto de todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com *a* e *b* inteiros e $b \neq 0$, sendo *a* o **numerador** e *b* o **denominador** da fração.

Todos os números racionais podem ser representados na forma de dízima e na forma de fração. Ambas as representações estão igualmente corretas e, dependendo da situação em que nos encontramos, uma poderá ter vantagens relativamente à outra.

Por exemplo, as frações $\frac{14}{2}$, $\frac{2}{10000}$ e $\frac{1}{3}$ podem ser representadas pelas dízimas 7, 0,0002 e 0,(3), respetivamente. As duas primeiras são dízimas finitas e a terceira é uma dízima infinita periódica. Numa dízima infinita periódica, o período encontra-se entre parêntesis, ou seja, $0,(3) = 0,33333...$ indicando que se repete indefinidamente. Um outro exemplo de uma dízima infinita periódica é $0,4(35) = 0,4353535...$ que também pode ser representada pela fração $\frac{431}{990}$.

Existem, no entanto, números que podem ser representados por dízimas, mas que não podem ser representados por frações, os **números irracionais**. As dízimas que os representam são infinitas não periódicas.

Um dos números irracionais mais conhecidos é o número π. Este número é o resultado da divisão do perímetro de qualquer círculo pelo seu diâmetro e faz parte de problemas matemáticos muito interessantes como o da quadratura do círculo.

Em termos práticos, estes números são muitas vezes aproximados por dízimas finitas. Por exemplo, o número π é muitas vezes substituído por 3,1416 ou até mesmo por 3,14. No entanto, sempre que possível, devemos realizar cálculos de forma exata, utilizando o símbolo que o representa.

O conjunto formado pelos números racionais e pelos números irracionais designa-se por **conjunto de números reais** ($\mathbb{R}$).

No contexto dos números reais importa introduzir o conceito de **intervalos de números reais**. Por exemplo, o conjunto de todos os números reais entre 0 e 2, no qual está incluído o número 0 mas não está incluído o número 2, pode ser representado por [0, 2[. Repare que o primeiro parêntesis está voltado para dentro, indicando que o 0 pertence ao conjunto e o segundo parêntesis está voltado para fora, indicando que o 2 não pertence ao conjunto. Os números 0 e 2 são designados por **extremos** do intervalo.

Estudaremos, em seguida, operações que podem ser efetuadas sobre números, bem como as suas propriedades.

Vamos fazer a apresentação destas operações definindo-as para o conjunto dos números naturais e estendendo progressivamente as suas definições para os restantes conjuntos numéricos: inteiros, racionais e reais. Se nos primeiros é bastante simples compreender a sua aplicação no dia-a-dia, à medida que as vamos estudando no contexto dos restantes conjuntos numéricos, vai-se tornando necessário mobilizar alguma capacidade de abstração para delas retirar utilidade prática.

1.1. Operações sobre números naturais

Podemos imaginar um número natural como o número de elementos de um conjunto.

- A **adição** é uma operação numérica representada pelo símbolo «+». Ao resultado da adição entre duas **parcelas** chamamos **soma**.

  Por exemplo, na adição:

  $$3 + 4 = 7$$

  Temos as parcelas 3 e 4 e a soma 7.

Filipe Carvalho é licenciado em Ensino de Matemática, mestre em Matemática e professor doutor em Ciências pela Universidade do Minho. É professor adjunto do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, a lecionar no grupo disciplinar de Matemática. Tem desenvolvido investigação na área da Matemática e suas aplicações. Neste âmbito, foi membro integrado do CMAT da Universidade do Minho, participou e foi orador de diversas conferências internacionais. Tem desempenhado funções de revisor científico de manuais escolares de Matemática A, do Ensino Secundário.

Sílvia Filipa Carvalho é licenciada em Ensino de Matemática pela Universidade do Minho, pós-graduada em Estatística Aplicada pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e mestre em Matemática pela Universidade do Minho. É professora do quadro do Ministério da Educação, a lecionar na área da Matemática no ensino secundário. Tem experiência como docente em diversas escolas públicas e privadas de diferentes níveis de ensino e percursos formativos. Exerceu funções em vários Institutos Superiores (Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Instituto Piaget, Instituto Superior de Saúde do Alto Ave, Instituto Politécnico do Cávado e do Ave) onde lecionou diversas unidades curriculares da área da Matemática. É coautora de dois livros de apoio ao estudo de Matemática do terceiro ciclo.

Este livro destina-se a todos os alunos que ingressaram ou pretendam ingressar no ensino superior.

Tem-se verificado que um crescente número de alunos sente a necessidade de recuperar ou reaprender os conceitos matemáticos basilares, indispensáveis como pré-requisitos para as novas aprendizagens com que se vão deparar. É a esta necessidade que este livro responde. Os seus leitores serão, pois, todos aqueles que procuram um elemento de apoio, um manual que os acompanhe e lhes permita rever, adquirir ou consolidar as noções e os conceitos prévios necessários para obterem sucesso nas unidades curriculares do ensino superior que exijam conhecimentos matemáticos.

691

ISBN 978-989-561-275-8

9 789895 612758