Fernando de Jesus
João Veríssimo Lisboa

INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

VidaEconómica

ÍNDICE GERAL

Nota prévia 7
Capítulo I – Natureza da Investigação Operacional 11
Capítulo II – Noções básicas de programação matemática 41
Capítulo III – Programação linear 67
Capítulo IV – Dualidade e análise de pós-otmização 101
Capítulo V – O modelo dos transportes 137
Capítulo VI – Programação com números inteiros 171
Capítulo VII – Programação por objetivos 213
Capítulo VIII – Programação dinâmica 241
Capítulo IX – Gestão de Stocks 259
Capítulo X – Filas de Espera 323
Capítulo XI – Teoria dos jogos 357
Capítulo XII – Simulação 381
Anexos 409
Referências bibliográficas 417
Índice sistemático 421

NOTA PRÉVIA

Em Portugal, adotou-se a designação «investigação operacional» (IO), tradução da expressão britânica «operational research». No Brasil, é utilizado o termo «pesquisa operacional», que apresenta o inconveniente de se poder confundir com a teoria da pesquisa (search theory), cuja criação e desenvolvimento se processou no âmbito da I.O. Nos Estados Unidos, está generalizado o emprego da designação «operations research» (investigação das operações), frequentemente identificada com «systems analysis» (análise de sistemas), «management science» (ciências da gestão) e outros termos.

Após esta sucinta observação sobre aspetos terminológicos, convém referir que, tal como noutras áreas de conhecimento, a gestão pura e aplicada tem beneficiado do concurso de outros domínios do saber, numa perspetiva interdisciplinar. Inserindo-se nesta interdisciplinaridade, a IO, surgida no decurso da Segunda Guerra Mundial (1939-45), e cuja caraterização é apresentada no Capítulo I desta obra, tem contribuido para o acentuado progresso da ciência da gestão, que apresenta subáreas fortemente matematizadas, devido ao recurso a ramos da matemática pura e aplicada na construção e utilização de diversos tipos de modelos matemáticos.

A *Introdução à Investigação Operacional*, destinada fundamentalmente a estudantes do ensino superior que frequentam unidade letivas de IO, ou relacionadas com a IO, segue a orientação adotada em idênticos manuais, descrevendo alguns dos principais modelos matemáticos que têm sido utilizados no âmbito da IO. Pressupõe-se, evidentemente, que os leitores deste livro possuem adequados conhecimentos de matemática pura (álgebra linear e análise) e aplicada (probabilidades e estatística), indispensáveis para a compreensão do texto.

No Capítulo II, apresentam-se as noções básicas de programação matemática, para depois se desenvolver o estudo do caso especial da programação linear no Capítulo III.

O Capítulo IV é destinado à exposição do problema da dualidade no caso dos modelos lineares.

No Capítulo V, faz-se referência ao caso especial da programação linear, conhecido por modelo dos transportes.

No Capítulo VI, é desenvolvido o estudo da programação matemática com números inteiros.

No Capítulo VII é dedicado à programação matemática por objetivos, matéria de grande interesse para as organizações que pretendem otimizar objetivos múltiplos.

O conhecimento da programação dinâmica, fundamental para modelar processos de decisão em estádios múltiplos, é apresentado no Capítulo VIII.

No Capítulo IX, o mais extenso desta obra, devido à sua grande importância na gestão de algumas organizações, são referidos os principais modelos deterministas e estocásticos utilizados na gestão de *stocks*.

No cerne do Capítulo X, está a teoria das filas de espera, que reúne o conjunto de modelos estocásticos concebido para a tomada de decisões nos fenómenos de espera, que surgem correntemente na vida quotidiana.

O Capítulo XI trata da teoria dos jogos de estratégia, que permite modelar situações concorrenciais que envolvem conflito de interesses.

Finalmente, no Capítulo XII, são apresentados os princípios fundamentais da simulação, destacando-se a importância de que se reveste a simulação aleatória na IO.

Sendo um texto de natureza pedagógica, é obra inacabada, cujos autores pretendem aperfeiçoar à medida que vão surgindo assuntos de interesse a tratar. É obra que procura aperfeiçoar-se continuamente, com o objetivo de contribuir para o ensino destas matérias aos estudantes do ensino superior.

Nesta nota introdutória, uma palavra de apreço à Editora Vida Económica por nos ter dado a oportunidade de publicar este livro.

Queremos também deixar aqui uma nota de satisfação por podermos inserir o lançamento deste livro no ciclo de atividades comemorativas do 30º aniversário da criação da licenciatura em Gestão da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Para terminar, esperamos que esta edição obtenha junto dos nossos alunos a aceitação que estas matérias merecem e que possa contribuir para melhorar os seus conhecimentos nesta área do saber.

Os autores

Fernando de Jesus

João Veríssimo Lisboa

CAPÍTULO I
Natureza da Investigação Operacional

1.1 Objecto de estudo da Investigação Operacional

Tendo-se verificado que é impossível dar uma definição precisa do âmbito de qualquer disciplina científica, prefere-se modernamente caracterizar um ramo da ciência, indicando a faceta sob a qual encara a unidade e complexidade do real. Adotando esta orientação, vamos caracterizar a I.O. [1]

Devemos já sublinhar que o seu próprio nome (I.O.) implica: investigação (aplicada) das operações. Outro ponto de vista relevante é que a I.O. envolve um ponto de vista particular das operações e um tipo especial de investigação aplicada.

Entende-se por *operação* o conjunto de atos requeridos para obter determinado resultado, i.e., uma operação é um complexo de atos inter-relacionados, executados simultaneamente ou em sequência, que conduzem à obtenção de determinados objetivos.

A I.O. não estuda, porém, todos os tipos de operações, interessam-lhe só as operações dos indivíduos integrados num certo tipo de *sistema*. Exemplificando: a I.O. não estuda as operações de um indivíduo que trabalha com uma máquina, mas sim o homem e a sua máquina.

A I.O. ocupa-se, pois, dos sistemas formados por duas ou mais partes cujos atos constituem uma operação. Grande número de sistemas que interessam à I.O. envolve a comunicação entre algumas das partes e certas conexões. A comunicação e as conexões caraterizam um tipo de sistemas a que se dá

1. Daqui em diante utilizaremos apenas a sigla I.O. para designar investigação operacional.

o nome de *sistema estruturado* ou *organização*. Mais rigorosamente, uma organização é um sistema que apresenta quatro caraterísticas essenciais:

a) Alguns dos seus componentes são seres humanos;
b) A responsabilidade das escolhas de um conjunto de atos está dividida entre dois ou mais indivíduos e (ou) grupo de indivíduos;
c) Os subgrupos funcionalmente distintos são conhecedores das escolhas de cada um dos outros por meio de comunicação ou observação;
d) Um grupo de indivíduos no sistema tem função de controlo: compara os resultados obtidos com os resultados desejados e faz ajustamentos no sistema por forma a reduzir as diferenças observadas.

Por exemplo, um sistema de fios, polos, painéis e telefones pode constituir um sistema de comunicações, mas não é uma organização, porque não tem componentes humanas. Agregando a esse sistema os quadros de pessoal, já poderá pensar-se numa organização.

Para exemplificar a condição b), pode tomar-se uma organização industrial em que os subgrupos são os responsáveis dos departamentos de produção, marketing, finanças, investigação, pessoal, etc.

A condição c) também é basilar, pois a comunicação e transmissão de informação entre os subgrupos é caraterística fundamental das organizações. Voltando a considerar uma organização industrial, notemos como é indispensável a existência de comunicação entre o departamento de produção e o de marketing, ou entre este e o de finanças.

Finalmente, deve notar-se a importância do controlo na caraterização de um sistema estruturado. Recorrendo ainda ao exemplo das organizações industriais, é sabido que os objetivos de curto prazo são consubstanciados num orçamento que, no entanto, não teria qualquer interesse se não fosse regularmente controlado, com o fim de detetar desvios cuja magnitude orienta a realização de ações corretivas.

Se alguma das condições b), c) e d) não é satisfeita o sistema não está organizado. Se qualquer destas condições, embora satisfeitas, não o é eficientemente, o sistema diz-se desorganizado.

Pode dizer-se que a classe dos fenómenos estudados pela I.O. é constituída pelas operações das organizações mas, note-se, nem todas essas operações são estudadas pela I.O.. A fim de as caraterizarmos, vamos indicar os quatro tipos de alterações que se verificam numa atividade organizada:

CAPÍTULO II
Noções básicas sobre programação matemática

2.1 Programação matemática clássica

Dada a função $f : D \subset R^n \rightarrow R$, consideremos o problema da determinação dos extremos de f no subconjunto de D definido por m relações ($m < n$) da forma

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i=1,2, \ldots, m)$$

ou, mais simplesmente, $g_i(x) = 0$ com $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Trata-se de um problema de programação matemática em que as restrições aparecem sob a forma de equações e que é vulgarmente designado por *programação matemática clássica*.

Admitamos que a matriz jacobiana B

$$B=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial g_3}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \cdots \ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \frac{\partial g_m}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_j} \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1,2,...,m \\ j = 1,2,...,n \end{pmatrix}$$

de tipo $m \times n$, possui a caraterística m em todos os pontos a considerar. Supondo que f possui um extremo relativo em x^*, fixemos a hipótese de, neste ponto, ser regular a submatriz contida nas primeiras m filas de B. Então, o teorema das funções implícitas garante que há uma vizinhança de $\hat{x}^* = \left(x_{m+1}^*, x_{m+2}^*, \cdots, x_n^*\right)$ tal que, para $\hat{x} = \left(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n\right)$ nessa vizinhança, se tem $x_i = \varphi_i\left(\hat{x}\right) \quad \left(i = 1, 2, \cdots, m\right)$.

Então, a função

$$h\left(\hat{x}\right) = f\left[\varphi_1\left(\hat{x}\right), \varphi_2\left(\hat{x}\right), \cdots, \varphi_m\left(\hat{x}\right), \hat{x}\right]$$

tem um extremo livre em $\hat{x}^*$, o que implica

$$\frac{\partial h\left(\hat{x}^*\right)}{\partial\left(x_j\right)} = 0 \qquad \left(j = m+1, m+2, \cdots, n\right). \tag{2.1}$$

Utilizando a regra para derivar funções compostas, vem

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \times \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad \left(j = m+1, m+2, \cdots, n\right). \tag{2.2}$$

Do teorema das funções implícitas conclui-se que as derivadas $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \left(k = 1, 2, \cdots, m\right)$ para um dado j são as soluções únicas do sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} \times \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{2.3}$$

Para $j = m+1.\ m+2,\ m+3,\ ..,,\ n$, obtêm-se deste modo $n–m$ sistemas de equações, um para cada j. Em vez de resolvermos estes sistemas em relação a $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ e procedermos à substituição em 2.2, procederemos de outro modo.

Consideremos os números $\lambda_i^* \quad \left(i = 1, 2, \cdots m\right)$ que constituem a solução única do sistema de m equações lineares

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i\left(x^*\right)}{\partial x_k} = \frac{\partial f\left(x^*\right)}{\partial x_k} \qquad \left(k = 1, 2, \cdots, m\right). \tag{2.4}$$

Este sistema é possível e determinado porque admitimos que a matriz $\left[\frac{\partial g_i\left(x^*\right)}{\partial x_k}\right]$ é regular.

CAPÍTULO III
Programação linear

3.1 Considerações gerais

A programação linear é o caso particular da programação matemática em que a função objetivo é linear e as restrições são desigualdades lineares. Tem-se então

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1,2,3,...,m$$

$$x_j \geq 0.$$

Se representarmos por X a matriz coluna cujos elementos traduzem as n variáveis principais do sistema ou também denominadas variáveis de decisão,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

por A a matriz dos coeficientes do sistema de equações

$A = \left[a_{ij} \right]$ com $i = 1,2,3, ..., m$ e $j = 1,2,3, ...,n$

por b a matriz coluna do segundo membro das restrições

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e por C a matriz linha dos coeficientes da função objetivo, podemos escrever o problema da seguinte maneira

max z=CX

$s.a.$

$AX \leq b$

com

$X \geq 0,$

dizendo-se que o problema está escrito na sua *forma canónica*.

Se transformarmos o sistema de inequações lineares num sistema de equações lineares em que todas as variáveis e o segundo membro estão sujeitos à restrição de não serem negativos, então o problema diz-se *estandardizado*. O problema pode então escrever-se do seguinte modo:

$$max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$s.a,$

$$\sum_{j=1}^{n+i} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, 3, ..., m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, .., n+i$$

CAPÍTULO IV
Dualidade e análise de pós-otimização

4.1 Introdução

Associado a todo o problema de programação linear, existe outro programa linear que se designa por *problema dual*. O inicial designa-se por *problema primal*. A partir da solução ótima de qualquer deles (primal ou dual), é possível obter a solução ótima do outro. Mais concretamente, o quadro ótimo do *Simplex* de um dos problemas fornece explicitamente a solução ótima do outro. Para além desta relação, a interpretação da solução do problema dual tem importância fundamental no âmbito da análise de sensibilidade e pós-otimização, conforme iremos ver adiante.

Na secção seguinte, iremos então apresentar as regras de construção do problema dual.

4.2 O problema dual

4.2.1 A formalização do problema dual

Consideremos o problema de maximização na sua forma canónica, com m restrições e n variáveis de decisão, que designaremos por problema primal:

$$max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$$

$s.a.$

$$\begin{array}{lll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & \leq & b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \cdots \quad \vdots & \leq & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3, \ldots n$$

O problema dual que lhe está associado é o seguinte:

$$min\ w = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + \ldots + b_mu_m$$

$s.a.$

$$\begin{array}{l}
a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \cdots + a_{m1}u_m \geq c_1 \\
a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \cdots + a_{m2}u_m \geq c_2 \\
a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 + \cdots + a_{m3}u_m \geq c_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \cdots + a_{mn}u_m \geq c_n
\end{array}$$

$$u_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,\cdots,m$$

em que os u_i são designadas por variáveis duais. A construção do problema dual é obtida do primal do seguinte modo:

1. Se o problema primal for de maximização, então o seu dual será de minimização (e vice-versa);
2. Cada restrição de um dos problemas corresponde a uma variável do outro problema;
3. A matriz dos coeficientes do problema dual $[a_{ij}]$ obtém-se transpondo a matriz dos coeficientes do problema primal;

CAPÍTULO V
O modelo dos transportes

5.1 Considerações gerais

O problema dos transportes é um caso particular do problema de programação linear geral. O objetivo consiste em transportar um produto disponível em diversas origens para um determinado número de destinos, presumindo-se que são limitados os recursos disponíveis nas origens e conhecida a procura em cada destino.

Embora este problema possa ser resolvido com recurso ao algoritmo do *Simplex*, a particularidade da sua estrutura matricial torna possível a utilização de um algoritmo mais eficaz na determinação da solução ótima do problema.

Neste capítulo, iremos conhecer dois métodos que permitem resolver o problema dos transportes:

- o método do *Stepping Stone*;
- o método de *Dantzig*.

Em qualquer destes dois métodos, partimos sempre de uma solução admissível básica e, depois, a partir desta, iremos encontrar outra à qual esteja associado um custo menor.

Para a determinação da solução básica inicial, dispomos ainda de três metodologias: o método do canto do Noroeste, o método do custo mínimo e o método de Vogel. Estes distinguem-se pela maior ou menor proximidade da solução básica inicial da solução ótima final.

5.2 A estandardização do problema dos transportes

Admitamos que existem m origens e n destinos. Representemos por s_i a quantidade de oferta disponível na origem i ($i = 1,2,3,\ldots,m$) e d_j a procura existente no destino j ($j = 1,2,3,\ldots,n$). Designemos por c_{ij} o custo de transporte de uma unidade do produto da origem i para o destino j. O objetivo que se pretende atingir é determinar as quantidades a transportar da origem i para o destino j de modo a minimizar os custos de transporte. Se representarmos por x_{ij} a quantidade do produto a transportar da origem i para o destino j, o problema pode ser formalizado do seguinte modo:

$$min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i\ ,\ \ i = 1,2,3,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j\ , j = 1,2,3,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge 0$$

A estandardização deste problema pode sempre ser efetuada, desde que as quantidades existentes nas origens igualem as quantidades necessárias nos destinos.

Com efeito, mesmo que tal não se verifique, por exemplo, se as quantidades existentes nas origens forem superiores às necessárias nos destinos, bastará criar um destino fictício para onde serão transportados, a custo nulo, os excedentes de cada origem. *Mutatis mutandis,* se as quantidades existentes nas origens forem inferiores às necessárias nos destinos. Deste modo, a função objetivo não vem alterada, pois os coeficientes destas novas variáveis são nulos, com a vantagem de se ficar a conhecer em que origem ficam os excedentes ou quais os destinos que ficaram por satisfazer.

Consideremos um exemplo para melhor compreender a estrutura de um problema desta natureza.

Exemplo 5.1

Uma companhia de transportes aéreos tem de decidir sobre as quantidades de combustível a adquirir a dois fornecedores. As companhias têm capaci-

CAPÍTULO VI
Programação com números inteiros

6.1 Introdução

Ao procurarmos determinar a solução ótima de um problema onde as variáveis só podem assumir valores inteiros, há a tentação de encontrar essa solução, resolvendo o mesmo problema no campo contínuo, arredondando para os valores inteiros mais próximos os valores das variáveis da solução obtida. Ora, tal procedimento pode conduzir a soluções diferentes da ótima. Se, não, vejamos o seguinte problema:

$$max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$s.a.$$

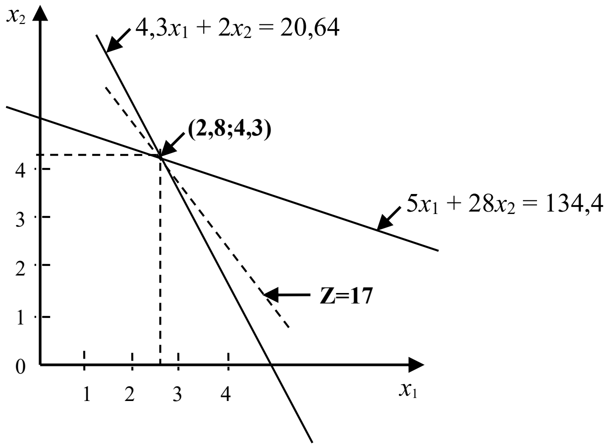
$$5x_1 + 28x_2 \leq 134,4$$

$$4,3x_1 + 2x_2 \leq 20,64$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1,2)$$

cuja resolução gráfica será

Figura 6.1: Resolução gráfica



No campo contínuo, a solução do problema é $x_1 = 2{,}8$ e $x_2 = 4{,}3$. Porém, se pretendermos encontrar a solução deste mesmo problema no campo dos números inteiros, arredondando os valores das variáveis da solução obtida para os valores inteiros mais próximos, verificamos que nem (2,4) nem (3,4) são solução. De facto, a solução inteira ótima é $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$.

Para resolver este problema, iremos estudar nas secções seguintes um método de resolução de problemas de programação linear com números inteiros desenvolvida por *Gomory*[1] e outro denominado *branch and bound*.

6.2 Programação com números inteiros: método de *Gomory*

Seja o problema

1. Ralph Edward Gomory, matemático nascido em Brooklyn Heights, Nova Iorque, é conhecido pelos seus trabalhos em investigação operacional, nomeadamente, na resolução de problemas com números inteiros.

CAPÍTULO VIII
Programação dinâmica

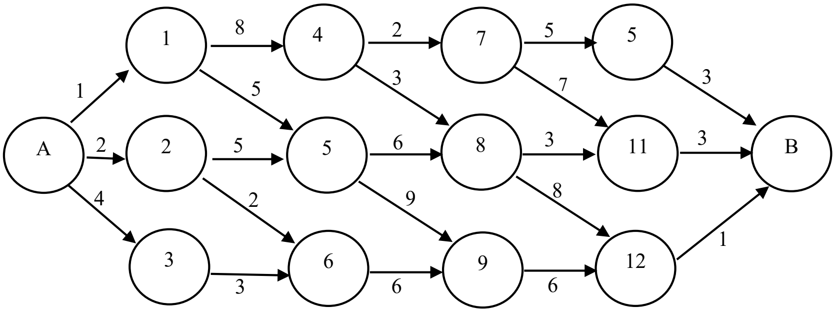
8.1 Introdução

A programação dinâmica é uma técnica matemática que permite resolver alguns problemas de decisão correntes em investigação operacional. Nos processos de decisão com estádios múltiplos, i.e., processos em que se tem de fazer uma sucessão de escolhas – cada uma destas entre uma ou mais possibilidades –, pode acontecer que a política ótima – política mais desejada de acordo com um critério predeterminado – seja obtida considerando, separadamente, os efeitos de cada decisão; em certos casos, porém, a política ótima não pode conseguir-se desta maneira. Um exemplo simples aclarará esta ideia.

Exemplo 8.1

Admitamos que se pretende determinar o caminho entre o terminal A e B (Fig. 8.1) tal que a soma das horas que figuram ao longo do caminho seja mínima.

Figura 8.1: Caminho mínimo entre duas localidades



Estamos perante um problema de decisão com cinco estádios. Fazendo corresponder a A a origem do percurso e supondo que a política ótima se obtinha considerando separadamente os efeitos de cada decisão, é evidente que se partiria do terminal A para a localidade 1 (decisão ótima do primeiro estádio), depois para a localidade 5, seguido da 8 e da 11, finalizando a viagem no terminal B, atingindo-se a soma de 18 horas. Ora vê-se facilmente que esta não é a solução do problema. O caminho mínimo é [A -2 - 6 - 9 – 12 - B], com soma de 17 horas. A solução correta deste problema – e a de outros problemas de decisão em estádios múltiplos em que a política ótima não pode obter-se, considerando separadamente os efeitos de cada decisão – pode atingir-se por meio dos métodos da programação dinâmica. No entanto, deve frisar-se que nem todos os processos de decisão em estádios múltiplos podem ser resolvidos pela programação dinâmica assim como nem todos os problemas de programação dinâmica são processos de decisão com estádios múltiplos.

8.2 A teoria da programação dinâmica

Toda a teoria da programação dinâmica assenta no princípio da otimização de Bellman[1], que se enuncia nos seguintes termos: *uma política ótima possui a propriedade de, qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, as restantes decisões deverem constituir uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão.*

Se designarmos por:

$f_n(x)$ – o resultado de um processo com n estádios que parte do estado x quando se adota uma política ótima;

P – o conjunto de políticas (estados) admissíveis;

$r_n(x,p)$ – o resultado do primeiro estádio de um processo n-dimensional que parte do estado x quando se toma uma decisão $p \in P$;

$x'(n,x,p)$ – o novo estado resultante da decisão p;

1. Richard Ernest Bellman (1920–1984) foi um matemático estadunidense, conhecido pela invenção da programação dinâmica, em 1953, bem como por outras contribuições fundamentais em outros ramos da matemática.

CAPÍTULO IX
Gestão de *stocks*

9.1 Introdução

Os primeiros estudos quantitativos sobre gestão de *stocks* remontam ao período da Primeira Guerra Mundial e são devidos a *F. Harris*, engenheiro da Westinghouse que escreveu, *em 1915,* um trabalho intitulado *Operations and Cost. O* modelo estabelecido por *F. Harris*, foi redescoberto, em 1918, por *R. H. Wilson,* que foi mais feliz na sua popularização, sendo hoje vulgarmente conhecido por modelo de *Wilson.*

O primeiro grande tratado sobre problemas de *stocks* foi publicado em 1931 por *F. E. Raymond*. Este trabalho teve enorme influência no desenvolvimento dos estudos sobre gestão de *stocks*.

Até ao período da Segunda Guerra Mundial, os modelos matemáticos utilizados na gestão de *stock*s eram, salvo raras excepções, de natureza determinista. Durante a guerra e no após-guerra começaram a ser desenvolvidos numerosos modelos aleatórios, sendo de destacar as contribuições de *Massé*, em 1946, *Arrow, Harris* e *Marschak*, em 1951, *Dvoretsky, Kieper* e *Wolfowitz,* em 1952, e *Whitin*, em 1953.

Obra muito importante no domínio dos métodos matemáticos aplicados à gestão de *stocks* deve-se a *Arrow, Karlin* e *Scarf,* que publicaram, em 1958, o famoso livro *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*.

Fundamentalmente, um *stock* é um volume de bens (matérias-primas, produtos intermédios ou produtos acabados) provisoriamente inativos que se destinam à venda ou utilização futura. O objetivo que deve nortear qualquer política de gestão de *stocks* deverá consistir em evitar quer *stocks* demasiado elevados, envolvendo grande imobilização de capital, quer um nível de existências suscetível de impossibilitar a satisfação regular da procura (ruptura de *stock*), igualmente com custos associados.

Gerir *stocks* consiste, fundamentalmente, em determinar as datas e as quantidades a reabastecer, por forma a minimizar uma apropriada função de custo.

O excesso de *stocks* em armazém, sejam eles de matérias-primas, produtos em vias de fabrico ou produtos finais, contribui para diminuir o poder competitivo da empresa, sobretudo pelo impacto que tem nos custos do produto. A determinação das quantidades apropriadas de existências para manter em *stock* assume, assim, aspeto muito importante e determinante na qualidade de serviço que se deseja dar ao cliente. Níveis de *stocks* apropriados asseguram o abastecimento normal do processo produtivo e a entrega atempada do produto final aos consumidores. Se houvesse a garantia de que os fornecedores entregavam as matérias-primas no seu devido prazo, de que as máquinas nunca avariavam e de que a previsão da procura não sofria de qualquer erro, então, as necessidades de *stocks* poderiam reduzir-se a zero. Ora, como se sabe, estas garantias não existem; há sempre um atraso, uma máquina que se avaria ou um cliente inesperado que é necessário satisfazer. Logo, mais do que necessário, é desejável que existam materiais em armazém para que se possa manter a operacionalidade da unidade de produção e um nível elevado de satisfação da clientela. Como tal, os *stocks* devem sempre resultar de uma tomada de decisão e não de uma acumulação aleatória de produtos sem qualquer racionalidade ou sem conexão com os objetivos da empresa. Se existe excesso de existências numa empresa, é porque foram tomadas más decisões ou então porque se verificou uma alteração significativa na procura final. Este equilíbrio entre manter um volume adequado de existências em armazém, de modo a satisfazer a clientela e, ao mesmo tempo, reduzir os custos associados à posse deste *stock*, é um desafio constante que se coloca ao gestor, e que não é fácil de satisfazer.

Os *stocks* são muitas vezes medidos em termos da capacidade produtiva, i.e., os responsáveis pela empresa atribuem às quantidades de existências em armazém um determinado número de dias de produção ou de satisfação da procura. Por exemplo, é vulgar ouvir-se afirmar que a empresa possui em *stock* “10 dias de produtos finais”, o que significa que possui em armazém uma quantidade de *stocks* suficiente para satisfazer a procura durante 10 dias. Ou então que tem em armazém “8 dias de matérias-primas”, dando assim uma indicação de que possui materiais em armazém suficientes para abastecer o ciclo produtivo durante oito dias.

CAPÍTULO X
Filas de espera

10.1 Introdução

A teoria das filas de espera agrega o conjunto de modelos matemáticos estocásticos construídos para o estudo dos fenómenos de espera que surgem correntemente na vida quotidiana, Nos "*guichets*" das gares, dos bancos e dos correios, no tráfego, enfim, em numerosas situações, deparamos com um fenómeno que se pode caraterizar do modo seguinte:

Certas unidades chegam de maneira aleatória a um local onde lhes é prestado um serviço. Nesse local, há uma ou várias estações de atendimento onde as unidades são servidas segundo a sua ordem de chegada e durante um período de tempo aleatório. Se, no momento de chegada ao local de certa unidade, todas as estações estão ocupadas, esta terá de ingressar numa fila de espera, aguardando o momento de ser servida.

O problema económico que se põe a propósito dos fenómenos de espera consiste na otimização de certa função que geralmente anda associada aos custos envolvidos no fenómeno e à eficiência do serviço. Essa otimização traduz-se, por exemplo, na modificação do número de estações, na alteração do tempo médio de serviço numa ou mais estações, na partição de uma fila ou na reunião de várias, etc.

A ocorrência de filas de espera é um dos acontecimentos mais observáveis diariamente. O fenómeno de "espera" também se encontra associado aos mais diversos processos operacionais nas empresas, nomeadamente quando um produto ou encomenda tem de esperar para transformação numa determinada máquina ou secção de fabrico. Como dissemos, o mesmo se passa no setor dos serviços, onde deparamos também com situações de espera, como, por exemplo, numa central de telefones onde as chamadas aguardam a sua vez para serem atendidas, nas urgências de um hospital ou ainda nas caixas de um banco onde os clientes aguardam para serem atendidos. Estes são apenas alguns exemplos de situação em que nos deparamos com filas de espera e que ilustram a frequência da sua ocorrência e, por conseguinte, o interesse em analisar este tema numa perspetiva analítica. As questões relacionadas com filas de espera são de natureza probabilista, denominando-se os resultados que se obtêm da análise às filas de espera por características operacionais, pelo facto de se referirem a determinadas especificidades dos processos, como, por exemplo, o tempo médio de espera na fila ou a probabilidade de um cliente não ter de esperar, que são utilizadas pelos responsáveis de uma organização para tomar decisões.

Associados às características operacionais estão habitualmente custos, como, por exemplo, o de perder um cliente por não ser atendido num tempo por ele considerado razoável, ou os aumentos de custos devido à acumulação de produtos em vias de fabrico que aguardam para ser transformados ou ainda os custos ocorridos com as máquinas de uma secção quando estão paradas.

De um modo geral, não se coloca o problema de otimização quando se analisa um problema de filas de espera, o que está em causa é a determinação das características operacionais do sistema que se pretende estudar. Para o efeito, existem diversos tipos de modelos. Neste capítulo, iremos apenas estudar aqueles que são utilizados em dois contextos com os quais mais nos deparamos na vida prática – um onde apenas existe um posto de atendimento (servidor) aos clientes e outro onde existe mais do que um.

10.2 *Inputs* para a análise das filas de espera

É através da análise do contexto em que se desenrola o problema das filas de espera que são obtidas as carcterísticas operacionais do sistema. Cabe ao decisor estabelecer inicialmente as condições importantes que o sistema deve possuir, de modo a poder atuar sobre os elementos que influenciam as caraterísticas operacionais do sistema. O decisor pode definir, por exemplo, o número máximo de clientes tolerados na fila de espera, ou o tempo máximo que os servidores deverão estar desocupados. Estas condições devem ser quantificadas, por exemplo, o número de clientes no sistema não deverá exceder as cinco unidades em 90% dos casos (número de clientes em espera

CAPÍTULO XI
Teoria dos jogos

11.1 Generalidades

As situações concorrenciais caracterizam-se pelo facto de dois ou mais indivíduos tomarem decisões em situações que envolvem conflito de interesses. Ora, na vida diária, surgem numerosas situações de concorrência em domínios como o económico, social, político, militar, etc.

A teoria de jogos de estratégia ou, simplesmente, teoria dos jogos é o ramo das matemáticas que permite abordar o estudo de tais decisões.

Um jogo é um conjunto de regras que governam o comportamento de dado número de indivíduos ou grupos de indivíduos, denominados jogadores. Essas regras devem especificar:

a) As *alternativas* entre as quais os jogadores fazem a *escolha* em cada fase da *partida* (realização do jogo);
b) A *informação* disponível para cada jogador quando faz uma escolha;
c) O *pagamento* a cada jogador depois de terminada a partida.

Entende-se por *estratégia* de um jogador a regra de decisão que ele utiliza para fazer a escolha entre as alternativas que se lhe oferecem.

Há vários critérios para fazer a classificação dos jogos. Assim, atendendo ao número de jogadores, há jogos de duas pessoas, três, *n* pessoas. Deve notar-se, no entanto, que, quando se fala de um jogo de *n* pessoas, referimo-nos não necessariamente às *n* pessoas que nele participam mas sim a que os participantes se dividem em *n* grupos de interesses opostos.

Num jogo, terminada a partida, faz-se, em geral, a transferência entre os jogadores das quantias previamente fixadas pelas regras do jogo. Interpretam-se os ganhos e perdas de um jogador como pagamentos que lhe são feitos, positivos, no primeiro caso, negativos no segundo. Os jogos dizem-se de soma nula ou de soma não nula (ou significativa), consoante é nula ou não a soma algébrica dos pagamentos.

Também se classificam os jogos de acordo com o número de alternativas que se oferecem a cada jogador. Se são em número finito; o jogo diz-se finito, se são em número infinito, o jogo diz-se infinito.

11.2 Jogos finitos de duas pessoas com soma nula

Os jogos finitos de duas pessoas com soma nula revestem-se da maior importância não só porque os jogos de *n* pessoas com soma significativa se podem reduzir a jogos de *n+1* pessoas com soma nula (através de um jogador fictício) mas também porque a teoria dos jogos de *n* pessoas com soma nula se baseia na dos jogos do mesmo tipo entre duas pessoas.

Um jogo finito com duas pessoas A e B fica perfeitamente caracterizado por um par de matrizes. As linhas para cada matriz representam as alternativas que se oferecem a A; as colunas representam as alternativas que se oferecem a B; os elementos são os correspondentes pagamentos a A, para uma matriz, e a B, para a outra matriz.

Num jogo com soma nula, o elemento situado na linha *i* e coluna *j* da matriz dos pagamentos de B é o simétrico do elemento homólogo da matriz dos pagamentos de A (Fig.11.1):

Figura 11.1: Matriz dos pagamentos de A e matriz dos pagamentos de B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

Na prática, omite-se geralmente a matriz dos pagamentos de B. Uma estratégia só poderá ser elaborada depois da escolha de um critério que traduz a atitude do jogador.

Supondo que os jogadores A e B são *inteligentes* e *prudentes*, o jogador A escolherá a linha na qual o seu ganho mais pequeno é máximo e o jogador

CAPÍTULO XII
Simulação

12.1 Generalidades

Não existe uma definição geralmente aceite de simulação. No entanto, num sentido lato, pode-se dizer que a simulação é uma metodologia para realizar experiências, utilizando um modelo do sistema real[1].

Enquanto o modelo representa o sistema, a simulação imita-o por meio de experimentação realizada sobre o modelo. Portanto, a simulação é, no fundo, um modo de manipular um modelo de certo sistema real. Em princípio, todos os fenómenos reais que podem ser estudados por métodos de simulação podem também ser analisados recorrendo a experimentação direta. Mas, na prática, pode ser impossível ou difícil realizar experiências sobre o próprio sistema que se pretende examinar. Os processos de simulação podem ser classificados em três tipos fundamentais, atendendo ao tipo de modelo que é utilizado. Assim, a simulação pode ser *icónica*, *analógica* ou *simbólica*.

A simulação icónica é a manipulação de um modelo icónico sob condições reais ou iconicamente representadas. Este tipo de simulação é largamente utilizado em problemas que envolvem a construção ou produção de um objeto. Por exemplo, um teste de um pequeno modelo físico de uma aeronave

---

1. O sistema é um conjunto de elementos (ou componentes) que têm certas características (ou atributos) e se encontram inter-relacionados. Por exemplo, uma fábrica é um sistema com máquinas e pessoas como elementos; a economia nacional é um sistema cujos elementos são os produtores e os consumidores.

num túnel de vento é uma simulação icónica; a construção e funcionamento de fábricas-piloto, processo comum na indústria química, constitui outro exemplo.

A simulação analógica envolve a manipulação de um modelo analógico (elétrico, mecânico, hidráulico, etc.). Por exemplo, na *London School of Economics* foi construído um modelo hidráulico de economia britânica — o MONIAC— que pode ser utilizado para simular o efeito de certas políticas monetárias do Governo. O largo emprego de computadores analógicos, particularmente no delineamento e controlo de processos de produção contínua, envolve este tipo de simulação. No estudo de processos de fila de espera, a chegada de clientes às estações de serviço tem sido simulada por dispositivos que emitem aleatoriamente partículas radioativas.

A simulação simbólica envolve a manipulação numérica de um modelo matemático, quando é difícil ou impossível a utilização de métodos analíticos para obter a solução do modelo.

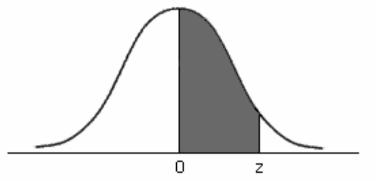
Assume hoje grande importância a simulação que envolve a participação do elemento humano e que tem por objetivo o treino do pessoal na tomada de decisões, designadamente quando esse pessoal se destina a utilizar certos tipos de equipamento. Esse tipo de simulação é vulgarmente conhecido por *processo de treino por simulação*, podendo ser utilizada qualquer das três categorias de modelos indicadas anteriormente. Como exemplo bem conhecido, temos a simulação de voo largamente utilizada no treino de pilotos da aviação. São também exemplos notáveis os chamados *jogos operacionais* que são utilizados no estudo de situações de conflito de interesses (caso dos jogos de empresas e dos jogos militares).

A simulação pode recorrer ou não a métodos probabilistas. No primeiro caso, a simulação diz-se *aleatória* (ou *estocástica*), sendo também frequentemente designada por *método de Monte Carlo*; no segundo caso, a simulação diz-se *determinista*. Tanto num caso como no outro, a simulação pode respeitar a um fenómeno certo ou aleatório.

Devido à grande importância de que se reveste a simulação aleatória na investigação operacional, vamos seguidamente dedicar especial atenção ao seu estudo.

ANEXOS
Tabelas

Tabela A – Distribuição Normal Estandardizada



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4986	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Tabela B – distribuição de Poisson

Os valores da tabela correspondem às probabilidades acumuladas

$$P(X \leq k) = \sum_{x=0}^{k} p(x)$$

para diferentes valores do parâmetro μ.

	μ															
k	.10	.20	.30	.40	.50	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
0	.905	.819	.741	.670	.607	.368	.223	.135	.082	.050	.030	.018	.011	.007	.004	.002
1	.995	.982	.963	.938	.910	.736	.558	.406	.287	.199	.136	.092	.061	.040	.027	.017
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.920	.809	.677	.544	.423	.321	.238	.174	.125	.088	.062
3	1.000			.999	.998	.981	.934	.857	.758	.647	.537	.433	.342	.265	.202	.151
4	1.000					.996	.981	.947	.891	.815	.725	.629	.532	.440	.358	.285
5						.999	.996	.983	.958	.916	.858	.785	.703	.616	.529	Ã,46
6						1.000	.999	.995	.986	.966	.935	.889	.831	.762	.686	.606
7							1.000	.999	.996	.988	.973	.949	.913	.867	.809	.744
8								1.000	.999	.996	.990	.979	.960	.932	.894	.847
9									1.000	.999	.997	.992	.983	.968	.946	.916
10										1.000	.999	.997	.993	.986	.975	.957
11											1.000	.999	.998	.995	.989	.980
12												1.000	.999	.998	.996	.991
13													1.000	.999	.998	.996
14														1.000	.999	.999
15															1.000	.999
16																1.000
17																
18																
19																
20																

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, David. R., Sweeney, Dennis. J. and Williams, Thomas A., *Management Science*, 3th edition, West Publishing Company, 1982.

Azoulay, P. et Dassonville, P., *Recherche Opérationnelle de Gestion (tome 2)*, Paris-P.U.F., 1986

Berthier, P. et Spalanzani, A., *La Gestion des Stocks*, Éditions Sirey, 1989.

Bradley, S. P., Hax, A. C. and Magnanti, T.L., *Applied Mathematical Programming*, Addison Weslay Publishing Company, 1977.

Brefort, D. and Nussembaum, M., *La gestion scientifique des stocks*, Librairie Dunod, 1971.

Budnick, F. S., Mojena, R. and Volmann, T. E., *Principles of Operations Research for Management*, Richard D. Irwin, Inc., 1977.

Buffa, F.S. and Taubert, *Production-Inventory System: Planning and Control*, 3th edition, Richard D. Irwin, 1989.

Chase, Richard B., Aquilano, Nicholas J., and Jacobs, Robert F., *Production and Operations Management–Manufacturing and Services*, 8th edition, McGraw-Hill, 1998.

Dresher, M., Games of Strategy. *Theory and Applications*, Paris Dunod, 1965.

Ferreira, João da Silva, *Introdução à Programação Linear*, Livraria Clássica Editora, 1976

Fishman, Georges S., *Principles of Discrete Event Simulation*, John Willey & Sons, 1978.

Gross, D., and Harris, C. M., *Fundamental of Queueing Theory*, John Wiley and Sons, 1974.

Hanna, Mark D., and Newman, Rocky W., *Integrated Operations Management*, Prentice-Hall, 2001.

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J., *Introduction to Operations Research*, 6th Edition, McGraw-Hill, 1995.

Ignizio, J. P., *Goal Programming and Extensions*, Lexington Books, 1976.

Intriligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall Inc., 1971.

Jesus, Fernando de, *Técnicas Matemáticas para a Gestão de Empresas*, Lisboa, Norma, 1967.

Jesus, Fernando de, *Investigação Operacional*, Tomo 1, Instituto Politécnico da Covilhã, 1977.

Karmanov, V., *Mathematical Programming*, Mir Publishers, Moscow, 1989.

Kaufmann, A., *Méthodes et modéles de la recherche opérationelle* (tome 1), Librairie Dunod, 1962.

Koo, D., *Elements of Optimization with Applications in Economics and Business*, Eastern Michigan University, 1977.

Laurent, P.J., *Les Methodes de Monte Carlo*, Grenoble, Faculté des Sciences et Institut Polytechnique, 1985/66.

Lee, Sang M., Moore, Lawrence J. and Taylor, Bernard W., *Management Science*, Wm. C. Brown Company Publishers, 1981

Lee, Sang M., *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach Publishers, 1972.

Lee, Sand and Shim, Jung, *Micro Management Science*, Wm. C. Brown Publishers, 1986.

Lisboa, João Veríssimo e Silva, Carlos Manuel Gomes, *Introdução à programação linear*, Edição da ESTG, 2003.

Little, J. D. C., *A Proof of the Queuing formulas: $L=\lambda W$, Operations Research*, Vol. 9, 1961, pp. 383-387.

Magee, J. F. and Boodman, D. M., *Production Planning and Inventory Control*, 2nd edition, McGraw-Hill 1967.

Marlov, W. H., *Mathematics for Operations Research*, John Wiley & Sons, 1978.

Meier, R.C., Newell, W. T. and Pazer, H. L., *Simulation in Business and Economics*, Prentice- Hall, 1969.

Mize, J., and Cox, G., *Essentials of Simulation*, Englewood, Prentice-Hall, 1968.

Mital, K. V., *Optimization Methods in Operations Research and System Analysis*, Wiley Eastern Ltd, 1979.

Mitchell, G. H., (1972), *Operational Research*. The English Universites Press, Ltd, London, 1972.

Murteira, B., *Jogos Finitos de Duas Pessoas com soma nula, Estudos de Matemática, Estatística e Econometria*, Vol. 1, ISCEF, 1956-57.

Nash, Sand Sofer,A., *Linear and Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, 1996

Pfaffenberger, R., R. and Walker, D. A., *Mathematical Programming for Economics and Business*, Iwoa State University Press, 1976

Ramalhete, M., Guerreiro J., e Magalhães, A., *Programação Linear*, Vols. 1 e 2, McGraw-Hill, 1984.

Slack, N,. Chambers, S. and Johnston, R., *Operations Management*, 4th edition, Prentice-Hall, 2004.

Swanson, L., *Linear Programming - Basic Theory and Applications*, McGraw-Hill.

Taha, Hamdy, *Operations Research*, 2ª edição. MacMillan, 1981.

Taylor, Bernard W., *Introduction to Management Science*, Prentice Hall, 5th edition, 1995.

Tersine, Richard, *Principles of Inventory and Materials Management*, 4th edition. Prentice-Hall, 1994

Tocher, K. D.,*The Art of Simulation*. The English University Press, London, 1972.

Trustrum, K., *Lineas Programming*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1971.

Vajda, S., *The Theory of Games and Linear Programming*, Paris Dunod, 1959.

Venttsel, E. S., *An Introduction to the Theory of Games*, D. C. Weath & Company, 1963.

Verobev, N. N., *Theory of Games; Lectures for Economists and System Scientists*, Springer-Verley, 1977.

Wagner, H., *Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions*, 3th edition, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1975.

White, D. and Lawrence, N., *Operational Research Techniques*, Vol. 1, Business Books, London, 1977.

Wittemberg, J. P., *Métodos e Modelos de Investigación de Operaciones* (Vol. II), Editorial Limusa, 1980.

Zionts, Stanley, *Linear and Integer Programming*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1974.

ÍNDICE SISTEMÁTICO

Índice Geral 5

Nota prévia 7

CAPÍTULO I – Natureza da Investigação Operacional

1.1 Objecto de estudo da Investigação Operacional 11

1.2 Metodologia da Investigação Operacional 14

1.2.1 Caráter interdisciplinar 14

1.2.2 Estudo dos sistemas como um todo 15

1.2.3 Recurso ao método científico 15

1.3 Breve história da Investigação Operacional 19

1.4 Descrição sumária da forma e conteúdo dos problemas que se apresentam à investigação operacional 21

1.4.1 Generalidades 21

1.4.2 Formas de problemas 22

1.5 Conteúdo dos problemas que se apresentam à I.O. 31

1.5.1 Compras 31

1.5.2 Produção 31

1.5.3 Distribuição, vendas e serviços de assistência 31

1.5.4 Investigação e desenvolvimento 32

1.5.5 Localização dos pontos de estrangulamento nas sequências . 32

1.5.6 Pessoal 32

1.5.7 Finanças e contabilidade 33

1.6. Relação entre a I.O. e outras ciências da gestão 33
1.6.1 Conteúdo 34
1.6.2 Comunicações 35
1.6.3 Controlo 35
1.7 Relações entre a I.O. e a economia 37

CAPÍTULO II – Noções básicas sobre programação matemática

2.1 Programação matemática clássica 41
2.2 Formulação geral de um problema de programação matemática .. 50
2.3 Suficiência das condições de Kuhn-Tucker 56
2.4 Exemplos numéricos de programação matemática 60
2.5 Exercícios propostos 64

CAPÍTULO III – Programação linear

3.1 Considerações gerais 67
3.2 A resolução gráfica 70
3.3 O algoritmo do Simplex 73
3.3.2 Valor de z ilimitado 85
3.3.3 Soluções múltiplas 87
3.3.4 O método das duas fases 90
3.4 Exercícios propostos 94

CAPÍTULO IV – Dualidade e análise de pós-otimização

4.1 Introdução 101
4.2 O problema dual 101
4.2.1 A formalização do problema dual 101
4.2.2 A determinação da solução ótima do problema dual 105
4.2.3. Interpretação económica das variáveis duais 111
4.2.4 Teorema dos desvios complementares 113
4.2.5 Algoritmo Simplex dual 114

4.3 Análise de pós-otimização 115
4.3.1 Introdução de novas variáveis.. 116
4.3.2 Alteração do segundo membro das restrições....................... 118
4.3.3. Alteração dos coeficientes das variáveis principais............. 120
4.3.4 Introdução de nova restrição.. 123
4.3.5. Análise de sensibilidade aos elementos do termo independente 126
4.3.6. Análise de sensibilidade aos coeficientes da função objetivo 128
4.3.6.1 Alteração de c_j estando este associado a uma variável não básica 128
4.4 Exercícios propostos 130

CAPÍTULO V – O modelo dos transportes

5.1 Considerações gerais.. 137
5.2 A estandardização do problema dos transportes 138
5.3 A determinação da solução básica inicial.................................... 142
5.3.1 Método do canto do noroeste (NO) 143
5.3.2 O método do custo mínimo... 145
5.3.3 O método de Vogel... 146
5.4 A determinação da solução ótima. O método do Stepping Stone .. 149
5.5 O método de Dantzig 152
5.6 Problemas de transportes. Casos particulares 158
5.6.1 Percursos impossíveis.. 158
5.6.2 Problemas com solução degenerada 158
5.7 O problema da afetação 160
5.7.1 O algoritmo húngaro... 160
Algoritmo húngaro.. 161
5.7.2 O problema de maximização 164

5.7.3 Matriz não quadrada 165

5.8 Exercícios propostos 167

CAPÍTULO VI – Programação com números inteiros

6.1 Introdução 171

6.2 Programação com números inteiros: método de Gomory 172

6.3 Outro método de Gomory: "tudo em inteiros" 180

6.4 Método "Branch and Bound" 190

6.4.1 Método "Branch and Bound" para problemas com solução mista 200

6.4.2 Método "Branch and Bound" para problemas com solução 0-1 202

6.5 Exercícios propostos 210

CAPÍTULO VII – Programação linear por objetivos

7.1 Introdução 213

7.2 Formulação geral de um problema de programação linear por objetivos 214

7.3 O método do Simplex adaptado à programação linear por objetivos 223

7.4 Exercícios propostos 237

CAPÍTULO VIII – Programação dinâmica

8.1 Introdução 241

8.2 A teoria da programação dinâmica 242

8.3 Exemplos de aplicação 247

8.4 Exercícios propostos 255

CAPÍTULO IX – Gestão de stocks

9.1 Introdução 259

9.2 Características dos stocks 262

9.3 Noções básicas 265

9.4 Modelos deterministas com procura contínua 267

9.4.1 Modelos estáticos para um produto 267

9.4.2 Modelo multiproduto de reposição instantânea com procura independente e contínua 288

9.4.3 Modelo multiproduto de reposição instantânea, procura independente e contínua, com limitação do espaço em armazém 290

9.4.4 O algoritmo de Wagner-Within para procura determinista e discreta 294

9.5 Modelos aleatórios 302

9.6 Determinação do stock de segurança 307

9.6.1 Introdução 307

9.6.2 Período de reposição constante com procura diária aleatória 309

9.6.3 Procura diária determinista e período de reposição aleatório 311

9.6.4 Procura durante o período de reposição e período de reposição aleatórios 312

9.7 Exercícios propostos 318

CAPÍTULO X – Filas de espera

10.1 Introdução 323

10.2 Inputs para a análise das filas de espera 324

10.3 Pressupostos das filas de espera 325

10.4 A origem das unidades no sistema 326

10.5 A função de distribuição de chegada dos clientes ao sistema 326

10.6 A disciplina da fila de espera 327

10.7 O número de estações de serviço 327

10.8 O número máximo de unidades permitidas na fila 327

10.9 A distribuição da saída das unidades do sistema 328

10.10 Notação a utilizar e relações entre as caraterísticas do sistema . 328
10.11 Modelos de filas de espera 330
10.11.1 Modelo com um servidor e sem lugares na fila de espera (M/M/1) 331
10.11.2 Modelo com um servidor e um número ilimitado de lugares na fila de espera (M/M/1:FCFS/∞/∞) 334
10.11.3 Modelo com mais de um servidor e um número ilimitado de lugares na fila de espera (M/M/c:FCFS/∞/∞) 340
10.11.4 Modelo com mais de um servidor e um número limitado de lugares na fila de espera (M/M/c:FCFS/Z/∞) 346
10.12 Exercícios propostos 354

CAPÍTULO XI – Teoria dos jogos

11.1 Generalidades 357
11.2 Jogos finitos de duas pessoas com soma nula 358
11.3 Estratégias puras, dominantes e mistas 360
11.4 A utilização de programação linear na determinação de estratégias mistas ótimas 365
11.5 Jogos contra a natureza 373
11.6 Exercícios propostos 376

CAPÍTULO XII – Simulação

12.1 Generalidades 381
12.2 Simulação aleatória (ou método de Monte Carlo) 383
12.2.1 Números aleatórios e pseudoaleatórios 383
12.2.2 Teste da uniformidade dos números (teste do χ^2) 386
12.2.3 Construção de uma amostra artificial de uma lei de probabilidade 388

12.3 Simulação por computador 401

12.4 Exercícios propostos 406

Anexos

Tabelas

Tabela A – Distribuição Normal Estandardizada 409

Tabela B – distribuição de Poisson 410

Tabela C – Tabela do Qui-quadrado 412

Tabela D – Tabela de números aleatórios 413

Tabela E – Números aleatórios da distribuição normal
com **μ = 0 e Σ = 1** 414

Tabela F – Números aleatórios da distribuição exponencial
com μ= 1. 415

Referências bibliográficas... 417

Índice Sistemático 421

INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Nesta obra são apresentados alguns dos principais modelos matemáticos que têm sido utilizados no âmbito da Investigação Operacional (IO). Trata-se de matéria que tem contribuído para o acentuado progresso da ciência da gestão, que apresenta subáreas fortemente matematizadas, devido ao recurso a ramos da matemática pura e aplicada na construção e utilização de diversos tipos de modelos matemáticos. Além do capítulo introdutório, o texto apresenta nos restantes os modelos nos domínios da programação matemática, gestão de stocks, filas de espera, teoria dos jogos e simulação.

O livro é destinado a estudantes do ensino superior e a outros interessados nestas matérias e a sua leitura pressupõe que os leitores possuam adequados conhecimentos de matemática pura (álgebra linear e análise) e aplicada (probabilidades e estatística), indispensáveis para a compreensão do texto.

www.vidaeconomica.pt

ISBN: 978-989-768-706-8

9 789897 687068 >