

João Veríssimo Lisboa  
Mário Gomes Augusto

# CÁLCULO FINANCEIRO

2ª EDIÇÃO  
REVISTA E ATUALIZADA



**VidaEconómica**

# Índice Geral

CAPÍTULO I – Capitalização e desconto .....	9
CAPÍTULO II – Rendas certas.....	55
CAPÍTULO III – Rendas incertas.....	93
CAPÍTULO IV – Reembolso de empréstimos.....	127
CAPÍTULO V – Empréstimos por obrigações.....	185
CAPÍTULO VI – Análise financeira de investimentos.....	253
ANEXOS A – Formulário e tabelas financeiras.....	325
ANEXOS B – Formulário e tabela atuarial .....	371
ANEXOS C – Tabela da distribuição normal.....	383
BIBLIOGRAFIA.....	386
ÍNDICE SISTEMÁTICO .....	389

# Nota prévia

Este texto tem por objectivo apresentar a lógica do raciocínio matemático na análise das operações financeiras de curto, médio ou longo prazo para todos os interessados no estudo do cálculo financeiro. Sendo um livro com características pedagógicas, o seu público alvo será essencialmente constituído pelos alunos que frequentam as disciplinas de Cálculo Financeiro, Gestão Financeira, Análise Financeira e Análise de Projectos, incluídas nos planos curriculares das licenciaturas (1º ciclo) mestrados (2º ciclo) em gestão e economia. Contudo, dada a natureza prática do seu conteúdo, também poderá ser um instrumento útil de aprendizagem ou aprofundamento de conhecimentos para os responsáveis pela área financeira das organizações. É pois um texto didáctico que cobre as matérias fundamentais da disciplina de Cálculo Financeiro, procurando-se em cada capítulo não só dar a conhecer os aspectos práticos das matérias apresentadas, mas também os seus fundamentos teóricos, de modo a permitir a construção de modelos de análise mais elaborados. Em todos os capítulos são apresentados exemplos práticos próximos da realidade, de forma a facilitar uma melhor compreensão da teoria que fundamenta o conhecimento daquela disciplina.

A nomenclatura usada nas secções de alguns dos capítulos segue muito de perto a utilizada no texto do Prof. Doutor Fernando de Jesus, “Matemática Financeira” editado pela Universidade da Beira Interior, a quem agradecemos por nos ter permitido a utilização da sua obra que neste texto é utilizada, em muita partes, como referência para os leitores mais interessados em aprofundar certas passagens e demonstrações de expressões de maior complexidade.

Uma palavra também de reconhecimento ao Prof. Doutor Luís dos Santos Fernandes, de quem um dos autores teve a sorte de ter sido aluno e cujas lições de Cálculo Actuarial permitiram incluir neste texto um capítulo de introdução a estas matérias, tão arredadas (infelizmente) dos conteúdos curriculares dos cursos superiores de gestão.

Optou-se pela adopção da teoria clássica na fundamentação do fenómeno da capitalização e desconto, nomeadamente em todo o desenvolvimento teórico do Capítulo I, reconhecendo os autores, todavia, a existência de uma outra abordagem à teoria geral da capitalização\*, que pensamos abordar numa outra edição vocacionada especificamente para um público académico interessado nos problemas da Matemática Financeira.

Esta 2ª edição encontra-se organizado em seis capítulos, acrescentado-se no final de cada um deles um conjunto de exercícios práticos resolvidos, que permitirão aos interessados testar os seus conhecimentos. Inclui também como anexos dois formulários de consulta rápida, um para o cálculo financeiro e outro para o cálculo actuarial, a que se juntam as correspondentes tabelas, as primeiras ainda muito úteis, sobretudo sob o ponto de vista pedagógico, apesar do desenvolvimento e fácil acesso aos meios computacionais.

Pensamos que esta obra irá ter bastante utilidade para os estudantes do ensino superior de Gestão dos países de língua portuguesa, já que não existem textos em português que reúnam numa obra só a variedade dos temas aqui tratados. Também os profissionais das área financeira poderão encontrar neste texto uma forma de actualização dos seus conhecimentos, na maioria das vezes adquiridos há bastante tempo e a necessitarem de actualização.

Se este livro conseguir satisfazer estas pretensões, os nossos objectivos terão sido atingidos.

Os autores

João Veríssimo Lisboa

Mário Gomes Augusto

---

\* Os leitores interessados numa outra abordagem conceptual à teoria geral da capitalização poderão consultar Peláez, Lourenzo Gil “Matemática de las Operaciones Financieras”, Editorial AC.

# CAPÍTULO I

## Capitalização e desconto

## I – Capitalização e desconto

### 1.1 Equação geral de capitalização. Valor acumulado e valor atual

Representemos por  $f(t)$  uma função monótona crescente, representativa do valor de um capital no momento  $t$ . Para medir a variação relativa deste capital correspondente a uma variação absoluta do tempo, utilizemos a taxa instantânea de capitalização  $\delta(t)$  que é dada por

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)h} \\ &= \frac{1}{f(t)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} = [\log f(t)]' .\end{aligned}$$

Como podemos observar, a taxa instantânea de capitalização obtém-se calculando a derivada logarítmica de  $f(t)$ . Como  $f(t)$  é uma função monótona crescente, o valor da sua primeira derivada será sempre positivo, qualquer que seja  $t$ , o que significa que a taxa instantânea de capitalização será sempre positiva.

Integremos  $\delta(t)$  no intervalo  $0$  e  $t$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(t) dt &= \int_0^t \frac{f'(t)}{f(t)} dt \\ \int_0^t \delta(t) dt &= [\log f(t)]_0^t \\ \int_0^t \delta(t) dt &= \log f(t) - \log f(0).\end{aligned}$$

Mas como o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos, então

$$\int_0^t \delta(t) dt = \log \frac{f(t)}{f(0)}$$

Fazendo

$$\varphi(t) = \int_0^t \delta(t) dt$$

teremos

$$\log \frac{f(t)}{f(0)} = \varphi(t)$$

e por definição de logaritmo

$$e^{\varphi(t)} = \frac{f(t)}{f(0)}$$

logo

$$f(t) = f(0) e^{\varphi(t)} \tag{1.1}$$

equação que se designa por “fórmula geral de capitalização” e que relaciona o valor de um capital no momento  $t$  com o seu valor no momento  $0$ . O termo  $f(t)$  denomina-se valor capitalizado ou valor acumulado,  $f(0)$  é o valor descontado ou valor atual,  $e^{\varphi(t)}$  designa-se por fator de capitalização e a  $\varphi(t)$  por fator logarítmico de capitalização.

Da expressão (1.1) retira-se que,

$$f(0) = f(t) e^{-\varphi(t)}$$

em que  $e^{-\varphi(t)}$  é o fator de desconto (ou de atualização) e  $-\varphi(t)$  é o fator logarítmico de desconto.

Define-se por taxa média de capitalização o quociente  $\frac{\int_0^t \delta(t) dt}{t}$ .

Quando a taxa média é referida à unidade de tempo  $[t, t+1]$ , é designada por taxa central de capitalização. Se a representarmos por  $i_t^c$ , virá

$$i_t^c = \int_t^{t+1} \delta(t) dt = \int_0^{t+1} \delta(t) dt - \int_0^t \delta(t) dt$$

Mas como por definição  $\varphi(t) = \int_0^t \delta(t) dt$ , então podemos exprimir a taxa central de capitalização em função de  $\varphi(t)$ :

$$i_t^c = \varphi(t+1) - \varphi(t) \quad (1.2)$$

## 1.2 Taxa de capitalização

Chama-se *taxa de capitalização* ao incremento sofrido por uma unidade de capital, decorrida uma unidade de tempo. Tendo disponível uma unidade de capital no momento  $t$ , recorrendo à expressão (1.1), o seu valor acumulado no momento  $(t + 1)$  será

$$\begin{aligned} f(t+1) &= f(0)e^{\varphi(t+1)} \\ &= \frac{f(t)}{e^{\varphi(t)}} e^{\varphi(t+1)} \\ &= f(t)e^{[\varphi(t+1)-\varphi(t)]} \end{aligned}$$

e atendendo a (1.2), vem

$$f(t+1) = f(t)e^{i_t^c}$$

Mas como  $f(t)=1$ , virá

$$f(t+1) = e^{i_t^c}$$

## Bibliografia

Artditti, F. e Levy, H., "The weighted average cost of capital as a cut-off rate: a critical analysis of the classic textbook weighted average", *Financial Management* Vol. 6, pp. 24-34, 1977.

Barros, Carlos P., "Avaliação Financeira de Projectos de Investimentos", Escolar Editora, 2007.

Bowers, N.L., Greber H.U., Hickman, J. C., Jones, D. L. e Nesbitt, C.J., "Actuarial Mathematica, The Society of Actuaries, Illinois, USA, 1986.

Brealey, Richard, Myers, Stewart e Allen, F. "Princípios de Finanças Empresarias", McGraw-Hill, Portugal, 2007.

Brigham, Eugene e Ehrhardt, M. C., "Financial Management Theory and Practice", 12ª Edição, Thomson South-Western, 2008.

Cadilhe, Miguel e Lago, Rosas, "Matemática Financeira Aplicada". Edições ASA, 1998.

Cadilhe, Miguel e Lago, Rosas, "Matemática Financeira e Noções Complementares". Edições ASA, 1985.

Canadas, Natália, "A Matemática do Financiamento e das Aplicações do Capital", Editora Plátano, 1998;

Cheng, C.S., Kite, D. and Radtke, R., "The Applicability and usage of NOV and IRR Capital Budgeting Techniques", *Journal of Managerial Finance*, pp. 10-36, 1994;

Damodaran, A., "Corporate Finance – Theory and Practice", John Wiley & Sons, Inc, 2001.

Depallens, Georges, "Gestion Francière de l'entreprise", Paris, Editora Sirey, 1974.

Dudgale, D., "Is there 'Correct' Method of Investment Appraisal?", *Journal of Management Accounting*, pp. 46-50, 1991.

Dudley, L., "A Note on Reinvestment Assumptions in Choosing Between Net Present Value and Internal Rate of Return", *Journal of Finance*, pp. 907-915, 1972.

Faria, Rogério, "Matemática Comercial e Financeira", McGraw-Hill, S. Paulo, 2000.

Fernandes, Luís dos Santos, Apontamentos das lições de "Cálculo Actuarial", Lisboa, Edição da Associação Académica dos ISCEF, 1958.

Fernandes, Luíz dos Santos, "Lições de Cálculo Actuarial", Edição da Associação Académica do ISCEF, 1958.

Frank, Aires, "Matemática Financeira", S. Paulo, McGraw-Hill, 1981.

Frank. Ayres, "Matemática Financeira", Editora Atlas, 1993.

Harper, Floyd e Workman, Lweis, "Fundamental Mathematics of Life Insurance", Homewood Illinois, Irwin, 1970.

Hillier, F., "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments", *Management Science*, Vol. 9 (3), pp. 443-57, 1963.

Hillier, F., "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments", *Management Science*, Vol. 9, Abril, 3, p. 443-57, 1963.

Jesus, Fernando de, "Matemática Financeira", Covilhã, Edições da UBI, 1976.

Krier, Jane Aubert, "Gestão e Recursos Financeiros", Lisboa, Editorial Presença, 1974.

# ÍNDICE SISTEMÁTICO

# Índice Sistemático

ÍNDICE GERAL.....	5
NOTA PRÉVIA.....	7

## CAPÍTULO I – Capitalização e desconto

1.1 Equação geral de capitalização. Valor acumulado e valor atual .....	11
1.2 Taxa de capitalização .....	13
1.3 Regimes particulares de capitalização.....	16
1.3.1 Regime de juro composto.....	16
1.3.2 Regime de juro simples .....	17
1.3.3 Comparação entre o regime de juro composto e o regime de juro simples.....	19
1.4 A operação de desconto.....	22
1.5 Taxas equivalentes.....	27
1.6 Capitais simultâneos.....	33
1.7 Exercícios resolvidos .....	38
1.8 Exercícios propostos.....	48

## CAPÍTULO II – Rendas certas

2.1 Definições.....	57
2.2 Rendas inteiras de termos constantes: valor atual e valor acumulado .....	58
2.3 Problemas com rendas .....	62
2.4 Rendas inteiras de termos variáveis em progressão aritmética .....	67

2.5	Rendas inteiras de termos variáveis em progressão geométrica .....	70
2.6	Rendas fracionadas .....	72
2.7	Rendas contínuas .....	76
2.8	Exercícios resolvidos .....	77
2.9	Exercícios propostos .....	87

### **CAPÍTULO III – Rendas incertas**

3.1	Introdução.....	95
3.2	Alguns elementos básicos de demografia atuarial .....	97
3.3	Valor atual e valor acumulado de uma renda incerta .....	98
	3.3.1 Renda vitalícia imediata de termos normais .....	101
	3.3.2 Renda temporária imediata de termos normais.....	103
	3.3.3 Renda vitalícia imediata de termos antecipados .....	105
	3.3.4 Renda temporária imediata de termos antecipados.....	107
3.4	Rendas inteiras de termos variando em progressão aritmética .....	109
	3.4.1 Renda inteira vitalícia de termos normais .....	109
	3.4.2 Renda inteira temporária de termos normais .....	111
3.5	Rendas fracionadas de termos constantes.....	114
	3.5.1 Renda vitalícia, imediata de termos normais .....	114
	3.5.2 Renda temporária, imediata de termos normais.....	117
	3.5.3 Renda vitalícia, imediata de termos antecipados .....	119
	3.5.4 Renda temporária, imediata de termos antecipados .....	120
3.6	Exercícios resolvidos .....	122
3.7	Exercícios propostos .....	124

**CAPÍTULO IV – Reembolso de empréstimos**

4.1	Introdução.....	129
4.2	Modalidades de reembolso de empréstimos.....	129
4.3	Modalidade 1: reembolso do capital de uma só vez no fim do prazo do empréstimo e um pagamento único dos juros no início do prazo do empréstimo .....	131
4.4	Modalidade 2: reembolso do capital e pagamento único dos juros de uma só vez no fim do prazo do empréstimo .....	133
4.5	Modalidade 3: reembolso do capital de uma só vez no fim do prazo do empréstimo e pagamento dos juros escalonado ao longo do prazo do empréstimo.....	134
4.5.1	Juros pagos em momentos equidistantes e com uma periodicidade igual ao da taxa de juro que está subjacente à formação dos mesmos.....	135
4.5.2	Juros pagos em momentos equidistantes e com uma periodicidade $[0,1/k]$ do período de referência da taxa.....	137
4.6	Modalidade 4: reembolso do capital escalonado ao longo do prazo do empréstimo e pagamento integral dos juros no início daquele prazo .....	143
4.7	Modalidade 5: reembolso do capital escalonado ao longo do prazo do empréstimo e pagamento integral dos juros no fim desse prazo .....	145
4.8	Modalidade 6: reembolso do capital e pagamento dos juros escalonados ao longo do prazo do empréstimo ..	146
4.8.1	Reembolso do empréstimo através do pagamento de prestações constantes .....	149

4.8.2	Reembolso do empréstimo através do pagamento de uma renda de termos variáveis com parcelas constantes de amortização de capital .....	156
4.8.3	Reembolso do empréstimo através do pagamento de uma renda de termos variáveis com parcelas de reembolso em progressão aritmética.....	159
4.8.4	Reembolso do empréstimo através do pagamento prestações variáveis em progressão aritmética.....	163
4.9	Exercícios resolvidos .....	169
4.10	Exercícios propostos.....	179

## **CAPÍTULO V – Empréstimos por obrigações**

5.1	Introdução.....	187
5.2	Conceitos fundamentais .....	188
5.3	A matemática de um empréstimo por obrigações: leis gerais .....	190
5.4	Modalidades de reembolso de um empréstimo por obrigações.....	195
5.4.1	Reembolso através do pagamento de uma renda de termos constantes .....	196
5.4.2	Reembolso através do pagamento de uma renda de termos variáveis com parcelas de reembolso constantes.....	207
5.4.3	Reembolso através do pagamento de uma renda de termos constantes, incluindo cada um deles um número constante de obrigações a amortizar .....	211
5.5	Taxas associadas a um empréstimo por obrigações .....	215
5.5.1.	Taxa real de custo.....	215

5.5.2 Taxa real de rendimento para o comprador de uma obrigação.....	218
5.5.3 Taxa real de rendimento para o conjunto dos obrigacionistas .....	219
5.5.4 Taxa relativa à esperança de vida de uma obrigação...	220
5.5.5 Taxa aparente ( <i>current yield</i> ) .....	223
5.6 Usufruto, nua propriedade e plena propriedade.....	223
5.7 Valor de uma obrigação .....	227
5.8 O risco das obrigações .....	231
5.9 Exercícios resolvidos .....	234
5.10 Exercícios propostos.....	247

## **CAPÍTULO VI – Análise financeira de investimentos**

6.1 Introdução.....	255
6.2 Métodos de análise da rendibilidade de um investimento..	257
6.2.1 Critérios utilizados na análise financeira de um investimento .....	262
6.2.1.1 O valor atual líquido (VAL).....	262
6.2.1.2 Taxa interna de rendibilidade (TIR).....	265
6.2.1.3 Valor atual líquido ajustado (VALA).....	269
6.2.2 O VAL e a TIR como critérios de escolha entre dois investimentos .....	271
6.2.3 Comparação de projetos com períodos de vida diferentes.....	274
6.2.4 O método do investimento diferença na escolha entre dois investimentos .....	278

6.3	O custo do capital .....	281
6.3.1	O custo das diversas fontes de financiamento .....	282
6.3.2	O custo marginal do capital .....	287
6.3.3	A função do custo marginal do capital .....	290
6.3.4	A escolha entre um conjunto finito de investimentos ...	296
6.4	A análise do risco .....	299
6.4.1	O modelo de Hillier .....	300
6.4.2	Discussão .....	308
6.5	Exercícios resolvidos .....	313
6.6	Exercícios propostos .....	319

### **REFERÊNCIAS**

Anexo A	Formulário e Tabelas Financeiras.....	325
Anexo B	Formulário e Tabela Atuarial.....	371
Anexo C	Tabela da Distribuição Normal Estandarizada .....	383

<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>386</b>
--------------------------	------------

# CÁLCULO FINANCEIRO

2ª EDIÇÃO

REVISTA E ATUALIZADA

Este texto tem por objetivo apresentar a lógica do raciocínio matemático na análise das operações financeiras de curto, médio ou longo prazo. As diversas matérias abordadas no livro são tratadas com a adequada profundidade teórica exigida à lecionação destas matérias no ensino superior, sem no entanto descuidar a vertente prática, tendo em atenção a sua utilização por um público menos exigente no desenvolvimento dos aspetos teóricos da matéria. É, pois, um texto didático que cobre as matérias fundamentais da disciplina de Cálculo Financeiro, o que o torna útil para a aprendizagem ou aprofundamento de conhecimentos dos responsáveis pela gestão financeira das organizações.

Em todos os capítulos são apresentados exemplos retirados da realidade empresarial, por forma a facilitar uma melhor compreensão dos assuntos abordados.

O texto inclui ainda dois formulários de consulta rápida, um para o cálculo financeiro e outro para o cálculo atuarial, a que se juntam as correspondentes tabelas, ainda muito úteis, apesar do desenvolvimento e fácil acesso aos meios computacionais.

Visite-nos em  
[livraria.vidaeconomica.pt](http://livraria.vidaeconomica.pt)

[www.vidaeconomica.pt](http://www.vidaeconomica.pt)

