

ÍNDICE

PREFÁCIO	v
1 MEDIDA E INTEGRAÇÃO: O INTEGRAL DE LEBESGUE	1
1.1 Conjuntos e funções mensuráveis	3
1.2 Medida de Lebesgue	9
1.3 Conjuntos de medida nula	12
1.4 O integral de Lebesgue	15
1.5 A dimensão de Hausdorff	17
2 ESPAÇOS DE FUNÇÕES E ESPAÇOS DE HILBERT	21
2.1 Espaços pré-hilbertianos	23
2.2 Espaços de Hilbert	27
2.3 Espaços de Lebesgue	31
2.4 Operadores	34
3 BASES DE ESPAÇOS DE HILBERT	37
3.1 Bases de espaços de Hilbert	39
3.2 Polinômios de Legendre	42
3.3 Teoremas fundamentais	44
4 OPERADORES	51
4.1 Operadores	53
4.2 Operadores adjuntos, hermiticos e unitários	54
4.3 Operadores de Sturm-Liouville	57
5 SÉRIES DE FOURIER	63
5.1 Séries de Fourier	65
5.2 Fenômeno de Gibbs	70
5.3 Convergência das séries de Fourier	73

6	DISTRIBUIÇÕES	79
6.1	Funcionais lineares e distribuições	81
6.2	Derivadas de distribuições	86
7	A EQUAÇÃO DAS ONDAS I: OSCILAÇÕES TRANSVERSAIS	93
7.1	A equação das ondas	95
7.2	Soluções de equilíbrio da equação das ondas	98
7.3	Soluções estacionárias da equação das ondas	100
7.4	Teorema de d'Alembert	106
7.5	Energia de ondas transversais	110
7.6	Ressonância	112
7.7	Equilíbrio de uma membrana retangular	115
7.8	Oscilações de uma membrana circular	116
7.9	A equação das ondas e a transformação de Lorentz	120
7.10	Soluções fortes e fracas da equação das ondas	121
8	A TRANSFORMADA DE FOURIER E AS FUNÇÕES DE GREEN	127
8.1	A transformada de Fourier	129
8.2	A relação de incerteza de Heisenberg	139
8.3	A fórmula da soma de Poisson	141
8.4	Funções de Green	142
9	A EQUAÇÃO DO CALOR	151
9.1	A equação do calor em meios infinitos	153
9.2	A equação do calor em meios finitos	158
9.3	Uma simetria da equação do calor	160
10	A TRANSFORMADA DE LAPLACE	163
10.1	A transformada de Laplace	165
10.2	Funções de Green	172
11	REFLEXÃO, REFRAÇÃO E DISPERSÃO DE ONDAS	177
11.1	Reflexão e refração de ondas transversais	179
11.2	Lei de Snell	182
11.3	Velocidade de fase	184
11.4	Velocidade de grupo	187

12 A TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA	191
12.1 A transformada de Fourier discreta	193
13 EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM	201
13.1 Equações às derivadas parciais de segunda ordem	203
13.2 Curvas características	209
13.3 O efeito Doppler	211
14 FONÕES E SOLITÕES	217
14.1 Ondas solitárias	219
14.2 Ondas lineares em redes: fonões	219
14.3 Ondas não lineares em redes: solitões	224
A O MÉTODO DOS RESÍDUOS	229
B GUIA PARA A RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS	235
BIBLIOGRAFIA	245

PREFÁCIO

A análise funcional dá-nos um conjunto de ferramentas matemáticas importantes para explorar do ponto de vista teórico, experimental e numérico os sistemas da Física e da Engenharia. As suas técnicas são particularmente úteis na determinação e no estudo de soluções de equações às derivadas parciais, na teoria dos operadores e das funções generalizadas ou distribuições, na construção de algoritmos de integração numérica e de processamento e análise de sinais.

Os primeiros seis capítulos deste livro são uma introdução informal à análise funcional, incluindo a análise de Fourier. O objetivo foi o de fazer um primeiro contacto com a teoria da medida e da integração, sem alguns dos seus aspetos mais formais. Do capítulo 7 ao capítulo 13, estudam-se as equações das ondas, do calor e a classe das equações de Laplace, assim como as técnicas mais usadas na obtenção das suas soluções. No último capítulo, estudam-se os solitões, como exemplo de ondas não lineares. No Apêndice A resumem-se alguns resultados da teoria dos resíduos e no Apêndice B dão-se indicações para a resolução dos exercícios.

Este texto resultou do ensino das Técnicas Matemáticas da Física no curso de Engenharia Física do Instituto Superior Técnico. É um texto básico e que serve de fundação às técnicas modernas da Física que se desenvolveram a partir dos anos vinte do século xx. A escolha das matérias teve em conta as necessidades técnicas básicas e a linguagem das várias disciplinas da Física e da Engenharia. Os assuntos lecionados são comuns a todas as áreas da Física que se faz dos nossos dias e não se sobrepõem a assuntos mais específicos, como sejam o estudo das equações de Maxwell, de Schrödinger ou de Navier-Stokes. O estudo destas equações é feito em detalhe em cadeiras mais especializadas.

Finalmente, agradeço aos editores da IST Press pelas revisões cuidadas dos vários assuntos aqui abordados. Agradeço ainda a todos os alunos que, ao longo dos anos, me deram sugestões importantes relativamente aos textos e às matérias aqui expostas. A todos eles estou sinceramente agradecido. Falhas ou gralhas que ainda tenham resistido são da minha inteira responsabilidade.

Lisboa, julho de 2019

1

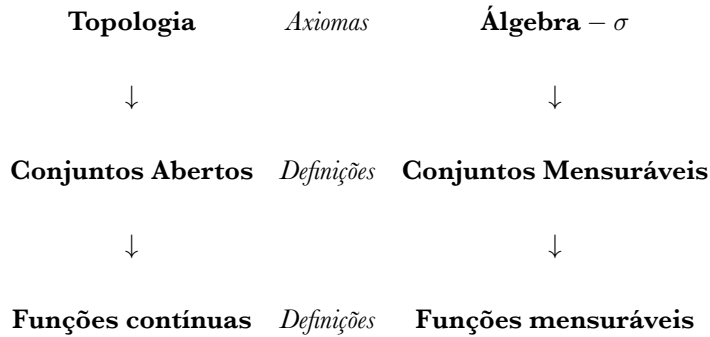
MEDIDA E INTEGRAÇÃO: O INTEGRAL DE LEBESGUE

Introduzem-se os conceitos de álgebra- σ , medida de um conjunto, conjunto de medida nula, função mensurável, medida de Lebesgue e de Hausdorff. Faz-se uma revisão de alguns resultados da teoria da integração de Lebesgue e são discutidos o teorema de Lusin, o teorema de Lebesgue da convergência dominada e o teorema de Fubini para integrais múltiplos. Introduz-se o conceito de dimensão fractal.

1.1 CONJUNTOS E FUNÇÕES MENSURÁVEIS

O conceito de medida de um conjunto generaliza as definições de comprimento, área e volume, está na base da construção dos espaços de funções e da teoria da integração de Lebesgue.

Em linhas gerais, o conceito de medida introduz-se através de um conjunto de axiomas que caracterizam as famílias de conjuntos *mensuráveis* de um espaço. Este conjunto de axiomas define uma estrutura designada por *álgebra- σ* . Um processo axiomático idêntico está na origem do conceito de conjunto aberto que é fundamental no estudo das funções contínuas. Neste caso, a caracterização dos conjuntos abertos é feita através da introdução de axiomas que definem uma topologia sobre o espaço. Este tipo de construções axiomáticas são familiares da álgebra e estendem-se, naturalmente, à análise.



Comece-se por relembrar o que é uma topologia e como se chega naturalmente aos conceitos de conjunto aberto, de conjunto fechado e de função contínua. Consideremos um conjunto X e uma família de subconjuntos de X que se designa por \mathcal{T} . Representa-se o conjunto vazio pelo símbolo \emptyset .¹ Diz-se que \mathcal{T} é uma topologia sobre X se se verificarem as condições ou axiomas:

- i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

¹O conjunto vazio não tem elementos.

ii) Se $A, B \in \mathcal{T}$, então $A \cap B \in \mathcal{T}$.

iii) Se $\{A_\alpha\}$ é uma família arbitrária de elementos de \mathcal{T} , então $\cup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}$.

Verificados os três axiomas anteriores para a família \mathcal{T} , diz-se que \mathcal{T} é uma topologia sobre X ou que (X, \mathcal{T}) é um espaço topológico. Quando se subentende uma topologia sobre X , diz-se simplesmente que X é um espaço topológico. Por definição, os elementos de \mathcal{T} são designados por conjuntos abertos.

Na topologia dos abertos, podem-se definir conjuntos fechados. Um conjunto C é fechado no espaço topológico X , se $C^- := X - C$ é aberto. O conjunto C^- designa-se por conjunto complementar de C em X . Deste modo, tem-se que X e \emptyset são simultaneamente conjuntos abertos e fechados.

Por exemplo, em \mathbb{R}^2 como espaço métrico, para a família de bolas abertas de centro 0 e raio $1/n$, $B(0, 1/n) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1/n^2\}$, tem-se que $\cap_{n=1}^\infty B(0, 1/n) = \{0\}$ e $\cap_{n=1}^m B(0, 1/n) = B(0, 1/m)$. Então, a interseção infinita de abertos pode não ser aberta mas a interseção finita de abertos é sempre um conjunto aberto. Estão assim justificadas as escolhas feitas nos axiomas ii) e iii) para a distinção entre conjuntos abertos e fechados.

A continuidade de uma função é uma propriedade topológica. Seja uma função $f : X \rightarrow Y$ em que X e Y são espaços topológicos, diz-se que f é uma *função contínua* num ponto $x_0 \in X$, se a pré-imagem de qualquer conjunto aberto que contenha $f(x_0)$ é um conjunto aberto que contém x_0 . Isto é, $f^{-1}(V)$ é um aberto de X , sempre que V é um aberto de Y , desde que $f^{-1}(V)$ e V contenham x_0 e $f(x_0)$, respetivamente. Pode-se demonstrar que esta definição de função contínua é equivalente, para funções reais de variável real, à definição usual dos $\varepsilon\varepsilon$ e $\delta\delta$ (Exercício 1.2).² O inverso da definição anterior não é verdadeiro. Isto é, pode-se ter uma função contínua cuja imagem de um conjunto aberto não é um conjunto aberto. Tome-se, por exemplo, a função constante sobre o conjunto dos reais.

Analogamente ao que foi feito para os conjuntos abertos, introduza-se o conceito de conjunto mensurável. Seja um conjunto X e uma família de subconjuntos de X que se designa por \mathcal{A} . A família de conjuntos \mathcal{A} é uma *álgebra- σ* sobre X se se verificarem as três condições:

i) $X \in \mathcal{A}$.

²Uma função $f(x) : X = \mathbb{R}^n \rightarrow Y = \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto $x_0 \in X$ se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que, $|x - x_0| < \delta$, implica que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. É usual escrever esta definição do seguinte modo,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

e $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$. A função f é contínua no espaço topológico X se é contínua em todos os pontos do seu domínio.

- ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$.
- iii) Se $\{A_n\}$ é uma família finita ou numerável de elementos de \mathcal{A} , então $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Um conjunto X juntamente com uma álgebra- σ designa-se por *espaço mensurável* e representa-se por (X, \mathcal{A}) . Por definição, os elementos de \mathcal{A} designam-se por conjuntos mensuráveis. Se existirem subconjuntos de X que não pertencem a \mathcal{A} , estes conjuntos não são mensuráveis. Muitas vezes, designa-se por X o espaço mensurável sem indicar a álgebra- σ .

Das três condições anteriores decorre que o conjunto vazio \emptyset pertence a \mathcal{A} , pois $X^c = \emptyset$. Nas álgebras- σ , as interseções finitas ou numeráveis estão sempre em \mathcal{A} . Ora veja-se. Se $\{A_n\}$ é uma família finita ou numerável de elementos de \mathcal{A} , então

$$\cap_n A_n = (\cap_n A_n)^{--} = (\cup_n A_n^c)^c \in \mathcal{A},$$

pois $\cup_n A_n^c \in \mathcal{A}$.

Em geral, é difícil caracterizar os elementos de uma álgebra- σ e, por isso, recorre-se a técnicas construtivas. Pode-se *gerar* uma álgebra- σ a partir de uma família de subconjuntos de X , juntando novos elementos através de uniões, interseções e de passagens ao complementar, no máximo numa infinidade numerável. Isto motiva a definição de *gerador* de uma álgebra- σ : uma álgebra- σ é gerada por um conjunto \mathcal{S} se todos os elementos da álgebra- σ se podem obter por operações de união e interseção, no máximo numeráveis, e passagens ao complementar de elementos de \mathcal{S} .

Designando por \mathcal{S} uma família de subconjuntos de X , escolhem-se todas as álgebras- σ que contêm \mathcal{S} . De facto, existe pelo menos uma álgebra- σ que contêm \mathcal{S} que é o conjunto de todos os subconjuntos de X . A álgebra- σ gerada por \mathcal{S} é a menor álgebra- σ que contêm \mathcal{S} e pode ser obtida pelas interseções de todas as álgebras- σ que contêm \mathcal{S} .

Se X é um espaço topológico, designe-se por \mathcal{B} a álgebra- σ gerada pelos conjuntos abertos de X — *álgebra- σ de Borel*. Assim, \mathcal{B} contêm conjuntos abertos e fechados. Os elementos de \mathcal{B} são designados por Borelianos.

Se $X = \mathbb{R}$, a álgebra- σ dos Borelianos pode ser gerada pela família de conjuntos abertos

$$\mathcal{S} = \{ (a, +\infty) : a \in \mathbb{R} \} .$$

Se $X = \mathbb{R}^n$ ou $X = \mathbb{C}^n$, a álgebra- σ canónica é a álgebra- σ de Borel gerada pelos abertos “semi-infinitos” de X .

No conjunto dos números reais \mathbb{R} , com a topologia canónica, o intervalo $[a, b]$ é fechado, o conjunto (a, b) é aberto e $(a, b]$ não é nem aberto nem fechado. O conjunto $(-\infty, b)$ é aberto e $(-\infty, b]$ é fechado.

Qualquer intervalo ou família de intervalos da reta pode ser obtido através de interseções, uniões ou passagens ao complementar de elementos de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, +\infty) \\ (-\infty, a) &= [a, +\infty)^- \\ (a, b) &= (-\infty, b) \cap (a, +\infty) \\ [a, b] &= [a, +\infty) \cap (-\infty, b] = [a, +\infty) \cap (b, +\infty)^- . \end{aligned}$$

Mostrou-se, assim, que $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, (a, b) e $[a, b]$ pertencem à álgebra- σ de Borel de \mathbb{R} , sendo, portanto, conjuntos mensuráveis.

Uma função real, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, em que X é um espaço mensurável, diz-se *mensurável* se, para todo o real a , os conjuntos

$$A_a = \{x: f(x) > a\}$$

são mensuráveis. Isto é, A_a pertence à álgebra- σ de X .

Se, para todo o $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos A_a estão na álgebra- σ de X , então os conjuntos, $\{x: f(x) \geq a\}$, $\{x: f(x) < a\}$ e $\{x: f(x) \leq a\}$ também pertencem à álgebra- σ de X . Pode-se partir de qualquer dos conjuntos anteriores para definir a mensurabilidade de uma função, pois

$$\begin{aligned} \{x: f(x) \geq a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x: f(x) > a - \frac{1}{n}\} \\ \{x: f(x) < a\} &= \{x: f(x) \geq a\}^- \\ \{x: f(x) \leq a\} &= \{x: f(x) > a\}^- . \end{aligned}$$

Vejam-se exemplos de funções mensuráveis.

Função característica ou função indicatriz de um conjunto. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e seja A um subconjunto de X . Seja a função

$$\chi_A(x) = 1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A . \end{cases}$$

Então, tem-se que

$$\{x: \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a \geq 1 \\ A & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ X & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

e $\chi_A(x)$ é mensurável se, e somente se, A pertence à álgebra- σ de X . Se o conjunto A é mensurável, $\chi_A(x)$ é uma função mensurável. A função $\chi_A(x)$ designa-se por função indicatriz do conjunto A .

Função simples. Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e suponha-se que $f(x)$ assume um número finito de valores a_1, \dots, a_n , quando x percorre X . Nestas condições, existem conjuntos A_1, \dots, A_n , definidos por

$$A_i = \{x \in X: f(x) = a_i\}.$$

Então, pode-se representar a função $f(x)$ por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

e $f(x)$ designa-se por função simples. A função simples $f(x)$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos A_i pertencem à álgebra- σ de X .

Se f e g são funções mensuráveis e $\{f_n\}_{n \geq 0}$ é uma sucessão de funções mensuráveis que converge para f , ponto a ponto, é fácil mostrar que:

- a) $|f|$ é mensurável.
- b) $\sup_n f_n(x), \inf_n f_n(x), \lim_n f_n(x), \lim_n \sup f_n(x) = \inf_{n \geq 1} (\sup_{k \geq n} f_k)$ e

$$\liminf_n f_n(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x)$$

são funções mensuráveis.

- c) $fg, f + g$ e $1/f$, com $f(x) \neq 0$, são funções mensuráveis.

Estas propriedades decorrem dos axiomas que definem as álgebras- σ e das relações entre as operações da teoria dos conjuntos. Por exemplo, com

$$\begin{aligned} \{x: |f(x)| > a\} &= \{x: f(x) > a\} \cup \{x: f(x) < -a\} \\ \{x: \sup f_n(x) > a\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\}, \end{aligned}$$

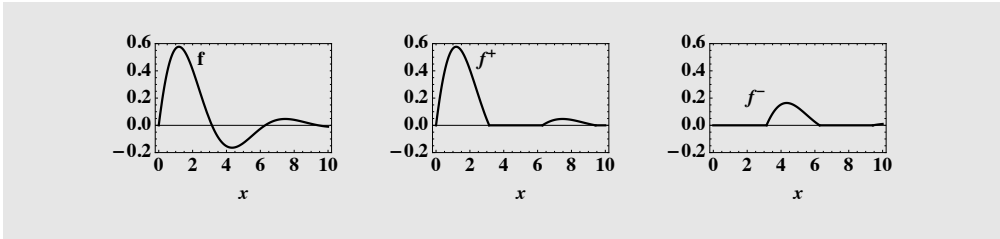


Figura 1.1 Decomposição de uma função como uma diferença de funções positivas,
 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

a mensurabilidade de $|f(x)|$ e de $\{x : \sup f_n(x) > a\}$ decorre dos axiomas das álgebras- σ . As restantes propriedades demonstram-se de maneira análoga (Exercício 1.3).

Seja f uma função real, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, e definam-se as funções $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$. Assim, tem-se que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, em que $f^+(x)$ e $f^-(x)$ são ambas funções positivas (figura 1.1). No que se segue e se refere a funções reais mensuráveis, sem perda de generalidade, pode-se restringir a análise às funções reais positivas.

Estabeleça-se uma relação entre funções simples e funções mensuráveis. É sempre possível determinar uma sucessão de funções simples $\{f_n\}$ que converge para f , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, para todo o $x \in X$. Suponha-se que $f \geq 0$ não é uma função simples e escolham-se os conjuntos

$$\begin{aligned} E_{n,i} &= \left\{ x : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n2^n \\ F_n &= \{x : f(x) \geq n\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

com $n = 1, 2, \dots$. Seja a função

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n \chi_{F_n}(x). \quad (1.2)$$

Por construção, $f_n \rightarrow f$, ponto a ponto. Por outro lado, se f é mensurável, também as funções f_n o são e $\{f_n\}$ é uma sucessão de funções simples que converge para a função positiva $f(x)$. No caso em que a função f toma valores positivos e negativos, a decomposição em funções simples é aplicada às funções positivas f^+ e f^- . Assim, dada uma função mensurável f , é sempre possível construir uma sucessão de funções simples, convergente ponto a ponto para uma função mensurável f .

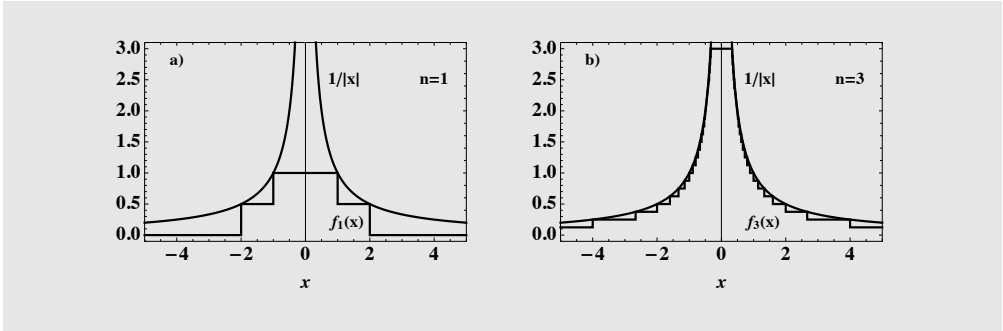


Figura 1.2 Aproximações à função $f(x) = 1/|x|$, com $x \in \mathbb{R}$, através das funções simples $f_n(x)$ definidas em (1.1) e (1.2). Em a), escolheu-se $n = 1$. Em b), escolheu-se $n = 3$.

Na figura 1.2 estão representadas aproximações com funções simples à função $f(x) = 1/|x|$.

1.2 MEDIDA DE LEBESGUE

Seja o espaço mensurável (X, \mathcal{A}) e seja uma função de conjuntos $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0^+$ em que $\bar{\mathbb{R}}_0^+ = \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ — μ é uma função não negativa. A função μ é aditiva- σ em relação à álgebra- σ \mathcal{A} se se verificarem os axiomas seguintes:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- b) Se $A_n \in \mathcal{A}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo o $i \neq j$, então $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Nestas condições, μ é uma *medida* sobre \mathcal{A} e (X, \mathcal{A}, μ) é um *espaço de medida*. A álgebra- σ \mathcal{A} é o domínio da medida μ .

Uma consequência imediata da definição de medida é que, se $A \subset B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$. Como $B = A \cup (B - A)$, tem-se que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$.

Seja o espaço euclidiano \mathbb{R}^k . Um k -intervalo ou k -cubo I é um conjunto de pontos de \mathbb{R}^k cujas coordenadas verificam

$$a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, k.$$

Um k -cubo pertence à álgebra- σ de Borel de \mathbb{R}^k , sendo, portanto, um conjunto mensurável. Por definição, o k -volume de I ou volume a k dimensões é

$$\ell(I) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i).$$

Uma família de conjuntos $\{I_j\}$ é uma cobertura de A , se $A \subseteq \cup_j I_j$. Seja então A um subconjunto de \mathbb{R}^k e suponha-se que $A \subset \cup_j I_j$, em que os I_j são k -cubos de uma *cobertura* de A , no máximo contável. A *medida exterior* de A é

$$\mu^*(A) = \inf_{\text{coberturas}} \sum_j \ell(I_j),$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas finitas ou numeráveis de A .

Designando por K um subconjunto fechado contido em A , então a medida interior de A é

$$\mu_*(A) = \sup_{K \subset A} \mu^*(K),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os conjuntos fechados contidos em A . Diz-se que o conjunto A é *mensurável à Lebesgue* se

$$\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$$

e $\mu(A)$ designa-se por *medida de Lebesgue* de A . A medida de Lebesgue de um conjunto é invariante para translações, $\mu(x + A) = \mu(A)$. Desta propriedade resulta:

Teorema 1.1 ([Stein e Shakarchi, 2005])

Na álgebra- σ de Borel de \mathbb{R}^k existe uma medida única μ , tal que, para qualquer k -intervalo I ,

$$\mu(I) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i).$$

A função positiva μ é a medida de Lebesgue e todos os conjuntos de Borel são mensuráveis à Lebesgue.

Todos os Borelianos são mensuráveis à Lebesgue, mas nem todos os subconjuntos de \mathbb{R}^k são mensuráveis à Lebesgue. De igual modo, existem conjuntos mensuráveis que não são Borelianos.

Para a construção da medida de um conjunto qualquer recorre-se à noção de *conjunto elementar*. Um conjunto de \mathbb{R}^k é elementar se pode ser descrito como a união finita de k -cubos, disjuntos dois a dois.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^k$ é mensurável à Lebesgue se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe um conjunto elementar B tal que

$$\mu^*(A \Delta B) := \mu^*((A - B) \cup (B - A)) < \varepsilon,$$

em que $A\Delta B$ é a diferença simétrica entre A e B . Então, os conjuntos mensuráveis à Lebesgue são os conjuntos que são bem aproximados por uniões de k -cubos.

Os espaços euclidianos $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}, \mu)$, em que \mathcal{B} é a álgebra- σ de Borel e μ é a medida de Lebesgue, são espaços de medida com as noções gerais de comprimento, área, volume, *etc.*

Outro exemplo de espaços de medida são os *espaços de probabilidade*.

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida sujeito à condição $\mu(X) = 1$. Assim, (X, \mathcal{A}, μ) é um *espaço de probabilidade* e μ é uma medida de probabilidade.³ Por exemplo, $([0,1], \mathcal{B}, \mu_{\mathbb{L}})$ é um espaço de probabilidade, em que $\mu_{\mathbb{L}}$ é a medida de Lebesgue e a álgebra- σ de Borel \mathcal{B} é gerada por todos os intervalos abertos, fechados ou semi-abertos de $[0,1]$.

Seja o espaço de probabilidade $([0,1], \mathcal{B}, \mu_{\mathbb{L}})$ e $[a,b]$ um intervalo contido em $[0,1]$. Uma variável aleatória x_t é uma função do tempo, discreto ou contínuo, que assume valores num certo conjunto. A variável aleatória x_t que assume valores no intervalo $[0,1]$ é *equidistribuída*, se a probabilidade de ocorrência de $x_t \in [a,b]$ é igual à medida de Lebesgue do intervalo $[a,b]$: $P(x_t \in [a,b]) = (b - a)$ (veja-se também o teorema 5.6). Sendo $p(x)$ a densidade de probabilidade da variável aleatória x_t , tem-se que

$$P(x_t \in [a,b]) = \int_a^b p(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a$$

e a função $p(x) = 1$ está associada à medida de Lebesgue. Muitas vezes associa-se a medida da Lebesgue, $\mu_{\mathbb{L}}([a,b]) = (b - a)$, com a densidade de probabilidade $p(x) = 1$.

Com estas definições, pode-se construir um algoritmo para a determinação de áreas. Seja N o número de pontos equidistribuídos no interior de um retângulo Q , com lados de comprimento a e b . A área ou medida de Lebesgue de Q é

$$\mu_{\mathbb{L}}(Q) = \int_0^a \int_0^b dx dy = ab.$$

Seja S um subconjunto de Q . Dada uma sequência de pontos $\{a_i\}_{i=1}^N$ equidistribuídos no retângulo Q , no limite $N \rightarrow \infty$, tem-se que

$$P(a_i \in S) = \frac{\int \int_S dx dy}{\int_0^a \int_0^b dx dy}.$$

³Probabilidade é a medida da possibilidade de ocorrência de um acontecimento.

Seja N_S o número de pontos da sucessão $\{a_i\}$ que estão no interior de S (figura 1.3). Então,

$$\text{área de } S = \mu_{\mathbf{L}}(Q)P(a_i \in S) \simeq ab \frac{N_S}{N}.$$

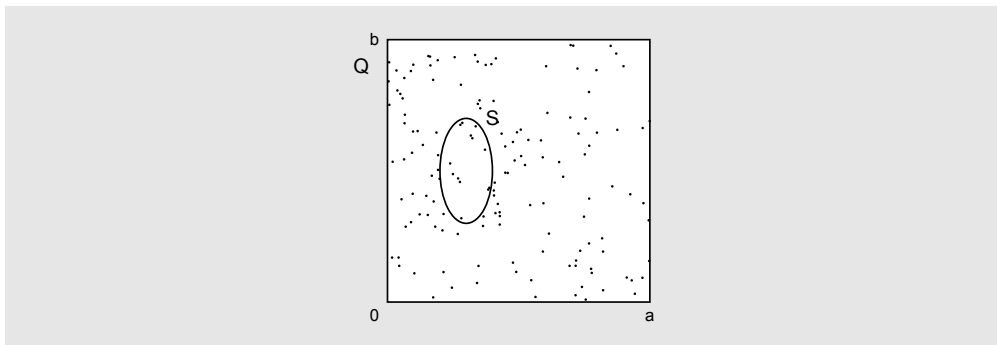


Figura 1.3 Método de Monte Carlo para a determinação de áreas e integrais em \mathbb{R}^k . A razão entre o número de pontos no interior de S e o número total de pontos no retângulo Q é proporcional à razão entre as áreas de S e de Q .

Esta técnica designa-se por método de Monte Carlo e é particularmente útil para a determinação numérica de integrais em \mathbb{R}^k . Por exemplo, seja $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função não negativa, o seu integral sobre um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^k$ pode ser determinado da seguinte maneira: seja a sequência de pontos $\{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ com $a_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,k}, y_i) \in \mathbb{R}^{k+1}$, em que $(a_{i,1}, \dots, a_{i,N}) \in A$, $C_1 \leq y_i \leq C_2$, $C_1 = \min_A f$ e $C_2 = \max_A f$. Se $\{a\}$ é uma sequência de pontos equidistribuída em $A \times [C_1, C_2]$, seja N_1 o número de elementos de $\{a\}$ para os quais $f(a_{i,1}, \dots, a_{i,N}) \leq y_i$. Então, tem-se que $\int_A f \approx \mu(A)(C_1 + (C_2 - C_1)N_1/N)$.

1.3 CONJUNTOS DE MEDIDA NULA

Os conjuntos de medida nula têm um papel importante na construção do integral de Lebesgue (secção 1.4) e na teoria dos espaços de funções (Capítulo 2).

É possível encontrar conjuntos de medida de Lebesgue nula e com a potência do contínuo. Um exemplo deste tipo de conjuntos é o conjunto ternário de Cantor.

Para construir o conjunto ternário de Cantor, subdivide-se o intervalo $[0,1]$ em três partes iguais e retira-se o conjunto aberto $(1/3, 2/3)$ (figura 1.4). A cada um dos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ retira-se um intervalo aberto de comprimento igual a um terço do comprimento do

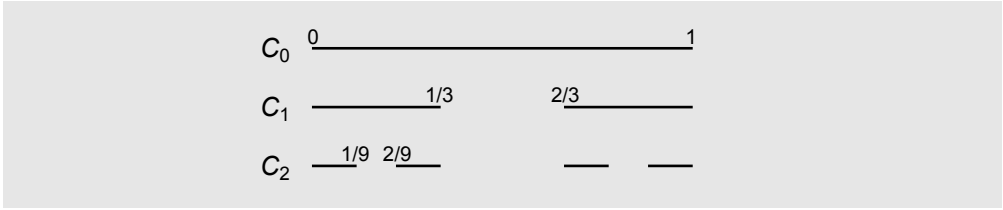


Figura 1.4 Construção iterativa do conjunto ternário de Cantor, $C_\infty = \bigcap_{n=0}^\infty C_n$.

intervalo inicial. Repetindo este procedimento, obtém-se a sucessão de conjuntos

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ C_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Designando cada subintervalo de C_n por I_{nj} , com $j = 1, \dots, 2^n$, tem-se que $C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$. O conjunto ternário de Cantor é o conjunto

$$C_\infty = \bigcap_{n=0}^\infty C_n.$$

A medida de Lebesgue de C_n é $\mu(C_n) = \frac{2^n}{3^n} = (\frac{2}{3})^n$ e a medida de Lebesgue de C_∞ é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \mu(C_\infty) = 0.$$

Por outro lado, C_∞ não é vazio, pois, por exemplo, $\{0\}, \{1/3\} \in C_\infty$. Assim, o conjunto ternário de Cantor C_∞ tem medida de Lebesgue zero.

Mostre-se que o conjunto ternário de Cantor tem a potência do contínuo. Isto é, C_∞ tem tantos elementos como o intervalo $[0,1]$, ou tantos elementos como o conjunto dos números reais. Por construção, o desenvolvimento ternário de $x \in C_\infty$ é

$$x = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i},$$

em que $a_i = 0$ ou 2 . Fazendo a correspondência biunívoca, $(a_i = 0) \rightarrow (b_i = 0)$ e $(a_i = 2) \rightarrow (b_i = 1)$, todo o número $x \in C_\infty$ é bijectivamente aplicado num número

$x' \in [0,1]$ através de

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad \rightarrow \quad x' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}.$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$, com $b_i = 0$ ou 1 , representa o desenvolvimento binário de um número do intervalo $[0,1]$, x' pode ser qualquer número no intervalo $[0,1]$. Assim, o conjunto de Cantor C_{∞} tem a mesma potência que o intervalo $[0,1]$ ou seja, C_{∞} tem a potência do contínuo.

Concluiu-se, assim, que existem conjuntos de medida de Lebesgue nula que têm tantos elementos como o intervalo $[0,1]$. No entanto, a medida de Lebesgue do intervalo $[0,1]$ é 1 e a medida de Lebesgue do conjunto ternário de Cantor é 0 .

Um conjunto A é de medida nula, se existir um conjunto mensurável B tal que, $A \subset B$ e $\mu(B) = 0$. É intuitivo ver que certas propriedades se mantêm para conjuntos que diferem por conjuntos de medida nula. É o caso dos conjuntos $[a,b]$ e (a,b) , em que $\mu([a,b]) = \mu((a,b))$. Pois, como $[a,b] \Delta (a,b) = \{a,b\}$, tem-se que, $\mu([a,b] \Delta (a,b)) = 0$.

Quando uma propriedade não é válida apenas sobre conjuntos de medida nula, diz-se que a propriedade é válida *quase por toda a parte* (q.t.p.). Assim, (q.t.p.) define uma relação de equivalência em medida.

Por exemplo, em relação à medida de Lebesgue, as funções $f, g : [0,1] \rightarrow [0,1]$ definidas por

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é racional} \end{cases}$$

são iguais quase por toda a parte, isto é, $f(x) = g(x)$ (q.t.p.), ou ainda, f e g diferem apenas num conjunto de medida nula do domínio comum (Exercício 1.4).

No caso de funções definidas na reta real, podem-se relacionar funções mensuráveis com funções contínuas:

Teorema 1.2 (Lusin, [Kolmogoroff e Fomin, 1977])

Seja μ a medida de Lebesgue em \mathbb{R} . Uma função $f(x) : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável no intervalo $[a,b]$ se, e somente se, para todo o $\varepsilon > 0$, existe uma função $\varphi(x)$, contínua em $[a,b]$, tal que

$$\mu(\{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon.$$

Assim, pelo Teorema de Lusin, uma função é mensurável num intervalo $[a,b]$ se ela difere de uma função contínua sobre um conjunto de medida arbitrariamente pequena. Em particular:

Corolário 1.3

Todas as funções contínuas são mensuráveis.

1.4 O INTEGRAL DE LEBESGUE

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida e $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x), \quad a_i \in \mathbb{R},$$

em que $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$ e μ é a medida de Lebesgue. Como os conjuntos $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots, n$, são mensuráveis, o *integral de Lebesgue* de $f(x)$ é

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Também se utilizam as notações

$$\int_X f(x) \mu(dx) \quad \text{ou} \quad \int_X f(x) \mu(x) dx.$$

Como se viu, dada uma função mensurável f , é sempre possível construir uma sucessão de funções simples que convergem ponto a ponto para f . Assim, é possível estender a definição de integral de Lebesgue para uma classe mais geral de funções. Uma consequência imediata da definição de integral é que se duas funções simples e mensuráveis diferem uma da outra num conjunto de medida nula, então os seus integrais de Lebesgue são iguais.

Se $f(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não negativa e mensurável e $\{f_n(x)\}$ é uma sucessão de funções simples convergentes para $f(x)$ (q.t.p.), o integral de Lebesgue de f em relação à medida μ é

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$$

e pode-se mostrar que esta definição é independente da sucessão escolhida. Se este limite é finito, a função mensurável f diz-se *integrável* em relação à medida μ .

No caso em que $f(x)$ não é uma função positiva, pode-se aplicar a decomposição, $f = f^+ - f^-$ e, devido à aditividade do integral, todos os resultados se mantêm válidos.

Um dos teoremas mais importantes da teoria da integração de Lebesgue é o teorema da convergência dominada:

Teorema 1.4 (convergência dominada de Lebesgue, [Kolmogoroff e Fomin, 1977])

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções mensuráveis de X para \mathbb{R} ou \mathbb{C} e suponha-se que $\{f_n\}$ converge para f (q.t.p.). Se existir uma função g , integrável em relação à medida de Lebesgue μ e tal que, para todo o $n \geq 0$, $|f_n| \leq g$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu < \infty.$$

Por exemplo, seja $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$, com $x \in [0,1]$. Então, como $|x^n| \leq 1 = g$, pelo teorema da convergência dominada, a função f é integrável à Lebesgue e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Nas condições do teorema da convergência dominada, pode-se sempre permutar o sinal de *limite* com o sinal de *integral*.

Na teoria da integração de Riemann, uma condição suficiente para que o integral de uma função exista num intervalo limitado, a função integranda tem de ser contínua e limitada nesse intervalo. Por outro lado, o limite de uma sucessão de funções integráveis à Riemann não é necessariamente integrável. Ora, esta situação levanta problemas ao construir os espaços de funções da análise funcional. Na teoria de Lebesgue, as condições de integrabilidade são menos restritivas do que na teoria de Riemann (Exercício 1.6), podendo-se sempre passar ao limite, desde que se verifiquem as hipóteses do teorema da convergência dominada de Lebesgue, ou seja, desde que $|f_n| < g$, com g integrável. Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, fazendo $g = |f|$, a integrabilidade de $|f|$ implica a integrabilidade de f .⁴ Assim, pode-se caracterizar o conjunto das funções integráveis no espaço de medida X como o conjunto das funções para as quais

$$\int_X |f| d\mu < \infty. \tag{1.3}$$

Em tudo o que se segue, os integrais deverão ser entendidos no sentido de Lebesgue e todos os espaços são mensuráveis, estando definida implicitamente uma álgebra- σ canónica. Nos espaços euclidianos considera-se sempre a álgebra- σ dos Borelianos.

Quando se estende a teoria de Lebesgue para funções a duas variáveis, tem-se:

⁴A função $\sin x/x$ não é integrável à Lebesgue em \mathbb{R}_0^+ , no entanto, o seu integral impróprio de Riemann existe.

Teorema 1.5 (Fubini, [Kolmogoroff e Fomin, 1977])

Seja $f(x,y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e suponha-se que

$$\int f(x,y)d\mu(x) \quad e \quad \int f(x,y)d\nu(y)$$

são ambas funções integráveis, isto é, os integrais

$$\int d\nu(y) \int |f(x,y)|d\mu(x) \quad e \quad \int d\mu(x) \int |f(x,y)|d\nu(y)$$

são finitos. Então,

$$\begin{aligned} \int \int f(x,y)d\mu(x)d\nu(y) &= \int \left(\int f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int \left(\int f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

1.5 A DIMENSÃO DE HAUSDORFF

A medida exterior de Hausdorff generaliza o conceito de medida de Lebesgue e é utilizada para comparar conjuntos de medida de Lebesgue nula. A necessidade deste novo conceito resulta do facto de a construção de uma medida depender da dimensão dos conjuntos. Por exemplo, o intervalo $[0,1]$ como subconjunto de \mathbb{R} tem medida de Lebesgue 1. Quando considerado como subconjunto de \mathbb{R}^k , com $k \geq 2$, a sua medida de Lebesgue é 0.

Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^k e defina-se o diâmetro de A como $|A| := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$. Seja $\{I_j\}$ uma família finita de subconjuntos de \mathbb{R}^k , em que $A \subset \cup_j I_j$. Se $|I_j| < \varepsilon$, para todo o j , então $\{I_j\}$ é uma ε -cobertura finita de A . A medida exterior de Hausdorff de A é definida como

$$H_d^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\text{coberturas}} \sum_j |I_j|^d,$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas as ε -coberturas finitas de A . Esta definição só faz sentido quando $H_d^*(A)$ é finito, isto é, quando existe uma constante d tal que $0 < H_d^*(A) < \infty$. Como se verá, a constante d tem o significado de uma dimensão.

Por exemplo, se I é um intervalo de comprimento ℓ , e os conjuntos I_j forem escolhidos como intervalos, $|I_j| = \mu(I_j)$, tem-se que

$$H_d^*(I) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\text{coberturas}} \sum_j \mu(I_j)^d.$$

Se os elementos I_j da cobertura $\{I_j\}$ são tomados com comprimento $\varepsilon = \ell/N$, tem-se que

$$H_d^*(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\ell}{N}\right)^d = \lim_{N \rightarrow \infty} N \left(\frac{\ell}{N}\right)^d = \lim_{N \rightarrow \infty} \ell^d N^{1-d}$$

e, portanto,

$$H_d^*(I) = \begin{cases} +\infty & \text{se } d < 1 \\ \ell & \text{se } d = 1 \\ 0 & \text{se } d > 1. \end{cases}$$

Como se conclui deste exemplo, o expoente d tem o significado de uma dimensão — *dimensão de Hausdorff* ou *dimensão fractal*.

Nos casos em que d é um inteiro, $H_d^*(A) = \mu^*(A)$, em que μ^* é a medida exterior de Lebesgue em dimensão (inteira) $d = n$.

Quando é possível encontrar uma partição regular de um conjunto em subconjuntos de medida de Lebesgue igual, pode-se facilmente determinar a dimensão de Hausdorff do conjunto. Assim, para $A \subset \mathbb{R}^k$, cada elemento I_j da cobertura em k -cubos, de lado ε , tem diâmetro $|I_j| = \sqrt{k}\varepsilon$, e

$$H_d^*(A) \underset{N \text{ grande}}{\sim} N(\sqrt{k}\varepsilon)^d,$$

em que N é o número de elementos da cobertura de A . Então,

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln H_d^*(A)}{\ln(\sqrt{k}\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(\sqrt{k}\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{\sqrt{k}\varepsilon}}.$$

Claro está que, por hipótese, $\ln H_d^*(A)$ é finito e $N \equiv N(\varepsilon)$. O número d , assim determinado, também se designa por *capacidade* ou *dimensão fractal* do conjunto A .

Calcule-se a dimensão e a medida de Hausdorff do conjunto ternário de Cantor. Assuma-se que $H_d^*(C_\infty)$ é uma constante positiva e cubram-se os conjuntos C_n com 2^n intervalos de comprimento $1/3^n$. Então,

$$H_d^*(C_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3^d}\right)^n = \text{constante}.$$

Para que este limite seja positivo, $2/3^d = 1$, e, portanto,

$$d = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309 \dots$$

Assim, em dimensão $d = 0,6309\dots$, a medida exterior de Hausdorff do conjunto ternário de Cantor é $H_d^*(C_\infty) = (2/3^d)^n = 1^n = 1$. Por exemplo, a medida de Hausdorff de $A = C_\infty \cap [0,1/2]$ é zero em dimensão 1 mas, em dimensão $\ln 2/\ln 3$, é

$$H_{\ln 2/\ln 3}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} \left(\frac{1}{3^n}\right)^{\ln 2/\ln 3} = \frac{1}{2}.$$

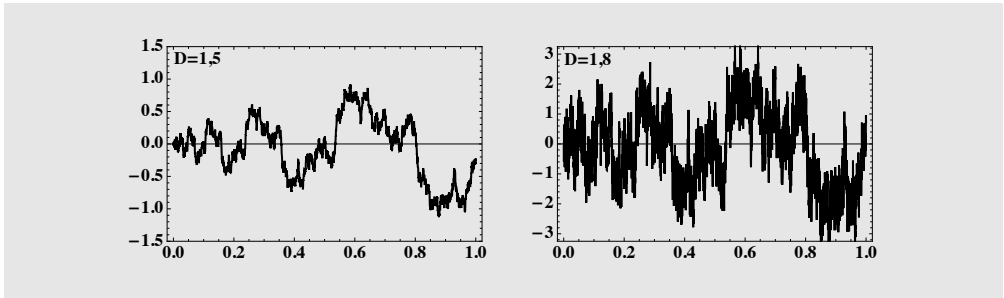


Figura 1.5 Gráficos da função de Weierstrass-Mandelbrot (1.4), para $D = 1,5$ e $D = 1,8$, com $\gamma = 1,5$. A constante D é a dimensão de Hausdorff do gráfico de f .

Os gráficos de funções também podem ter dimensões não inteiras. É o caso da função contínua e não diferenciável de Weierstrass-Mandelbrot

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \gamma^n x}{\gamma^{(2-D)n}}, \tag{1.4}$$

em que $\gamma > 1$ e $1 < D < 2$. Na figura 1.5, estão representados os gráficos de $f(x)$ para $D = 1,2$ e $D = 1,5$, com $\gamma = 1,5$. A constante D é a dimensão de Hausdorff do gráfico de f .

EXERCÍCIOS

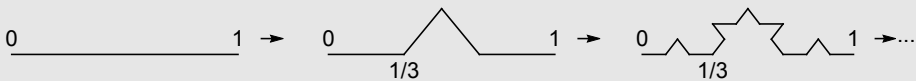
- 1.1 Seja o conjunto finito $X = \{a,b,c\}$ e sejam $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b\}, \{c\}\}$ e $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}\}$ duas famílias de subconjuntos de X . Qual das estruturas (X, \mathcal{T}_1) ou (X, \mathcal{T}_2) é um espaço topológico?
- 1.2 Mostre que a definição usual de função contínua é equivalente à seguinte definição: sejam X e Y espaços topológicos e, para simplificar, faça-se $X = Y = \mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua, se $f^{-1}(V)$ é um aberto de X , sempre que V é um aberto de Y .

- 1.3 Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Mostre que $f + g$, f^2 , fg e $1/f$ são funções mensuráveis. Neste último caso, suponha que $f(x) \neq 0$, para todo o $x \in X$.
- 1.4 Mostre que a medida de Lebesgue de qualquer conjunto finito ou numerável da reta é zero. Em particular, determine a medida de Lebesgue dos conjuntos dos números racionais e irracionais do intervalo $[0,1]$.
- 1.5 Faça uma estimativa de π usando apenas papel e lápis. Comece por esboçar à mão um quadrado com uma circunferência inscrita. Coloque vários pontos no interior do quadrado, distribuídos uniformemente. Faça a contagem e calcule uma aproximação a π .
- 1.6 Considere a função simples (função de Dirichlet) $f(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, em que,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Calcule o integral $\int_0^1 f(x)dx$, no sentido de Lebesgue. Use resultados do Exercício 1.4). Mostre ainda que a função $f(x)$ não é contínua em nenhum ponto.

- 1.7 Determine a dimensão de Hausdorff do conjunto do plano obtido através das operações indicadas na figura (curva de Koch). Em cada iteração, os comprimentos dos segmentos de reta que constituem a curva são os mesmos.



- 1.8 Quais as dimensões de Hausdorff dos conjuntos dos números reais do intervalo $[0,1]$ que não contêm dígitos pares nas bases decimal, ternária e quaternária?