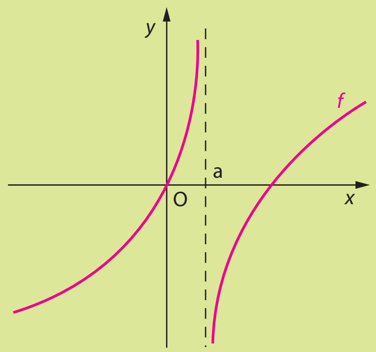
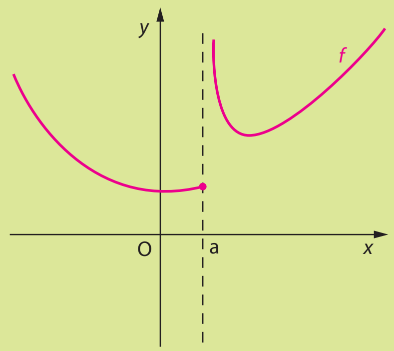
Assimptotas do gráfico de uma função

assimptotas verticais

A recta de equação $x = a$ é assimptota vertical do gráfico da função **f** se e só se

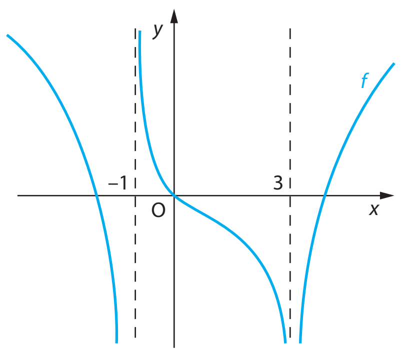
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty .$$





29 Exemplo

Dada a função **f** representada graficamente, pode observar-se que



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty ,$$

pelo que a recta de equação $x = -1$ é assimptota vertical do gráfico da função **f** .

Como $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$, pode-se concluir que a recta de equação $x = 3$ é outra assimptota vertical do gráfico da função **f** .

30 Exemplo

Determine as equações das assimptotas verticais do gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

b) $g(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $i(x) = \dfrac{e^x}{x}$

resolução

a) O domínio da função **f** é $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3 , 3\}$.

Determinação dos limites laterais da função **f** nos pontos de abcissas -3 e 3 :

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A recta de equação $x = -3$ é assimptota vertical do gráfico de **f** (como ambos os limites laterais são infinitos, a assimptota é bilateral).

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A recta de equação $x = 3$ é assimptota vertical do gráfico (bilateral).

Como a função **f** é contínua em todo o domínio, não existem outras assimptotas verticais.

nota Basta que um dos limites laterais da função seja infinito para concluir que existe assimptota vertical.

b) O domínio da função **g** é $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2 , 2\}$.

- Cálculo dos limites laterais no ponto -2 :

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

A recta de equação $x = -2$ é assimptota vertical bilateral do gráfico de **g** .

- Calculemos agora os limites laterais no ponto 2 :

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ indeterminação} \right)$$

Levantando a indeterminação, tem-se:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2}{x + 2} = \frac{2}{2 + 2} = \frac{1}{2}$$

02
funções